様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ６ 月 ２０ 日現在

機関番号：３２６４４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2017～2018
課題番号：１７Ｋ１８１２６

研究課題名（和文）待ち行列ネットワークの性能評価に向けた反射型ランダムウォークの漸近解析

研究課題名（英文）Tail asymptotics of a stationary distribution of a reflecting random walk and its application to queueing networks

研究代表者
小林　正弘（Kobayashi, Masahiro）

東海大学・理学部・准教授

研究者番号：９０６０９３５６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,300,000円

研究成果の概要（和文）： 2次元反射型ランダムウォークの定常分布の特性を求める研究を行った．反射型ランダムウォークとは，ランダムウォークを非負整数値に制限した確率過程であり，待ち行列やファイナンス，生物工学などに利用される確率モデルである．確率過程において安定状態における分布を定常分布と呼ぶ．
本研究では2次元の反射型ランダムウォークの定常分布に関する数値計算との誤差上界を理論的に導出した．さらに，反射型ランダムウォークの推移を行列型にした，一般化2次元反射型ランダムウォークに対して，定常分布の漸近的な挙動を理論的に解析した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
反射型ランダムウォークは，待ち行列理論のみならず他分野にも応用されるモデルである．さらに，定常分布は確率モデルの性能評価をする上で非常に重要な指標となっている．
反射型ランダムウォークの定常分布について，理論的な特性を求めている研究は多くある．しかし，ほとんどの研究が強い仮定をしている．本研究では，その仮定を取り除き，定常分布の理論的な特性を新たな証明により得ることができた．本研究の結果は，より一般的な待ち行列ネットワークに応用を可能とする．さらに新しい証明方法は，さらなるモデルの一般化を可能とすることが予想される．

研究成果の概要（英文）：We are interested in a stationary analysis of a two-dimensional reflecting random walk. Here, the two-dimensional reflecting random walk is a discrete time stochastic process on the non-negative quadrant. For the reflecting random walk, a distribution in the steady state is called a stationary distribution.
In this study, we obtain an error upper bound of the stationary distribution between theoretical and numerical solutions. In addition, we also obtain the tail asymptotics of the stationary distribution of a discrete time two-dimensional quasi-birth-and-death process which is generalization of the two-dimensional reflecting random walk.

研究分野：待ち行列理論

キーワード：反射型ランダムウォーク　待ち行列　定常分布　漸近解析　誤差上界

１．研究開始当初の背景

$0 < p < 1$とする．確率変数列$X_1, X_2, X_3 \cdots$　が独立で同一分布に従い

$$P(X_n = -1) = 1 - p, \quad P(X_n = 1) = p, \quad n = 1,2,3, \cdots$$

を満たすとする．確率変数Y_0を整数を値に取りうる初期値とし，確率変数列$Y_1, Y_2, Y_3 \cdots$　が以下で与えられるとする．

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n \quad n = 1,2,3, \cdots$$

確率過程$\{Y_n\}$を 1 次元ランダムウォークと呼ぶ．1 次元ランダムウォークは状態空間が整数全体の集合であるため，Y_nは負の値も取りうる．状態空間を非負整数全体の集合に制限し，取りうる値が 0 以上の整数値としたランダムウォークを 1 次元反射型ランダムウォークと呼ぶ．取りうる値を 0 以上に制限しているため，1 次元反射型ランダムウォークが 0 の位置に滞在しているときは，確率pで 1 となり，確率$1-p$で 0 にそのまま滞在する．1 次元反射型ランダムウォークをベクトル型にした確率過程を多次元反射型ランダムウォークと呼ぶ．本報告では，1 次元反射型ランダムウォークと多次元反射型ランダムウォークの総称を反射型ランダムウォークと呼ぶことにする．反射型ランダムウォークは，待ち行列のみならず，ファイナンス，生物工学などで応用される重要な確率過程である．そのため，反射型ランダムウォークは理論側面からのみならず，応用側面からも盛んに研究が行われてきた確率モデルである．

確率過程において，時刻に依存した解析も重要であるが，理論的な結果を導出するのは非常に難しい．そこで，確率過程に対して時刻の極限をとり，状態が定常であるケースを考える．このとき，状態が定常であるため，確率過程は時刻に不変な分布を持つ．この分布を定常分布と呼ぶ．定常分布は，確率過程に周期がないという条件の下では，確率過程に極限分布と一致するため，定常分布の解析を行うことにより，確率過程の時刻に対する極限の挙動を得ることができる．さらに待ち行列理論における定常分布はシステムを導入する際の性能評価として使われている．そのため，反射型確率過程及び待ち行列の解析において，理論的側面のみならず応用的側面からも定常分布の解析を行うことは非常に重要であると言える．

1 次元反射型ランダムウォークについて，定常分布が必ず幾何分布で与えられることが知られており，その表現から逆に定常分布の存在条件を求めることができる．しかし，2 次元以上の反射型ランダムウォークについては，定常分布が陽表現で得られるとは限らない．そのため，2 次元以上の反射型ランダムウォークの定常分布の解析については，存在条件，漸近特性，陽表現を持つための十分条件の導出や近似解析などが行われている．ここで，定常分布の漸近特性の導出とは，状態の極限をとったとき，定常分布がどのような関数で減少していくかを導出することであり，漸近特性により確率の漸近的な挙動を見ることができる．特に 2 次元反射型ランダムウォークについては多くの研究が行われており，存在条件及び漸近特性の導出については，近年の研究によりほぼ理論的な結果が揃っている．

しかし，2 次元反射型ランダムウォークで表現できるモデルは限られている．待ち行列モデルであると，2 次元反射型ランダムウォークで表現できるモデルは，2 ノードのネットワークで各客の到着間隔とサービス時間分布が指数分布に従うものに限られてしまう(ただし，同時到着や同時サービス，集団到着などはあっても良い)．応用の側面から見ると，より高次元でより一般的な反射型ランダムウォークに対して，理論的な結果を導出することが重要である．しかし，現状では反射型ランダムウォークの定常分布の特性について理論的な結果は，2 次元反射型ランダムウォークに限られてしまう．

以上の背景から，本研究ではより一般的な反射型ランダムウォークに対して，定常分布の何かしらの特性を求めることを目標とした．さらに，存在条件や漸近特性のみならず，反射型ランダムウォークの定常分布に対して，新たな評価量を定義し，その評価量の特性を導くことを目標とした．

２．研究の目的

背景でも述べたように，本研究では反射型ランダムウォークの定常分布に対してより一般的な理論的結果の導出を目標とした．その目的は応用の観点では以下の背景から動機づけられる。

(1) 反射型ランダムウォークの定常分布の特性を得ることにより，待ち行列ネットワークで表現される通信ネットワークの安全設計に役立てることができる．

(2) 反射型ランダムウォークはより広い待ち行列モデルを扱うことができる．さらに，他分野にも応用される可能性を持つ．

(1)について

近年，タブレットやスマートフォンの需要が増え，通信が多様化されると共に，多様化した通信ネットワークの保守・運用及び管理は今後益々重要となってくる．そのようなネットワークに対して，設計段階での見積もり，すなわち，安全設計を目的とした性能評価を行うことは，クライアント側の「待ち」の見積もりや重負荷によるサーバ切断の危険性など，運用における様々な場面で必要となってくる．本研究では，この多様化した通信ネットワークを待ち行列ネットワークと考える．通信ネットワークにおいて，クライアントのサーバへのアクセスは客の到着，それらのパケットを処理することは客のサービスと考えることができ，それらの到着とサービスは

確定的ではない挙動を示す場合が多い．通信ネットワークを待ち行列ネットワークと捉え，その待ち行列ネットワークを反射型ランダムウォークで表現することにより，確定的ではない要素を持つ現象を確率モデルとして捉えることを可能とする．
さらに，通信ネットワークの「待ち」やサーバ切断の危険度などに対して，確率的な評価ができる．すなわち，クライアントの平均待ち時間や平均滞在時間，クライアントが接続できない確率，サーバの過剰負荷が起こる確率などが導出できる．

(2)について

多くの待ち行列ネットワークは，反射型ランダムウォークにより，確率モデルとして表現される．待ち行列ネットワークの代表例であるジャクソンネットワークのみならず，同時到着や同時サービスなどがある待ち行列ネットワークも反射型ランダムウォークにより表現することができる．さらに，反射型ランダムウォークをより一般化することも可能であり，到着過程やサービス時間が一般化した待ち行列ネットワークやノード数を一般化した待ち行列ネットワークを表すことができる．一般化した反射型ランダムウォークは，様々な分野に応用される重要なモデルである．より一般化を行うことにより，様々な現象の解析に役立つ．

次に，理論的背景を述べていく．反射型ランダムウォーク及び待ち行列ネットワークについては，非常に多くの研究が行われている．その中で，多次元次元反射型ランダムウォークの理論的研究は以下のものがある．

- 2 次元反射型ランダムウォークの定常分布の存在条件(文献①など).
- 2 次元反射型ランダムウォークの定常分布の大偏差理論と減衰率の導出(文献②,④など).
- 有界な推移を持つ 2 次元反射型ランダムウォークの定常分布の厳密な漸近特性の導出(文献③など).

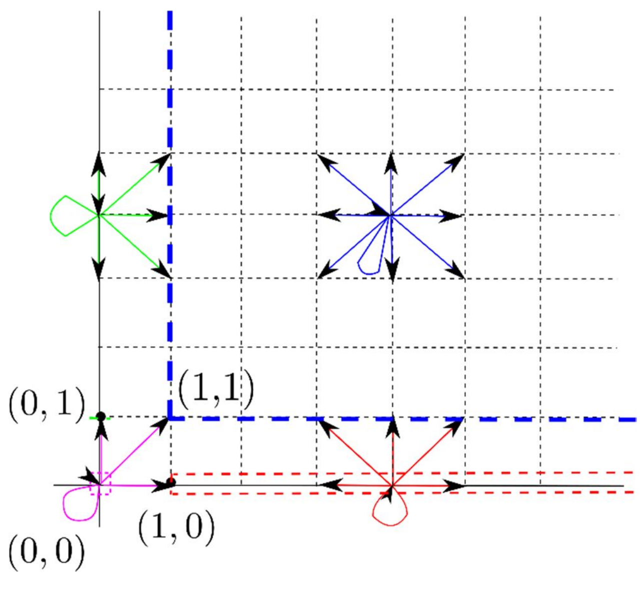
しかし，既存研究の多くは，2 次元反射型ランダムウォークの定常分布の解析が中心であり，理論的にも応用面でも，より高次元でより一般的な反射型の定常分布の解析が必要となってくる．そこで，上記の一般化が以下のように行われた．

・一般化 2 次元反射型ランダムウォークの定常分布の存在条件と漸近特性(文献⑤，⑥)

2 次元反射型ランダムウォークは，各状態で「推移確率」が存在する．一般化とは，その推移確率が行列型にしたものである．これにより，到着やサービスがより一般的なモデルであるネットワークを記述することが可能である．しかし，結果として不十分であるところがあった．そこで，本研究ではその結果の拡張とさらに 2 次元反射型ランダムウォークに対して新たな評価量を定義し，その導出を行った．

３．研究の方法

本研究で対象としている 2 次元反射型ランダムウォークを推移図と呼ばれる図で表すと以下のようになる．



本研究では，まず 2 次元反射型ランダムウォークに対して，誤差上界を定義した．2 次元反射型ランダムウォークの定常分布について，一般的には陽表現で求まらないことが知られている．そのため，定常分布を理論的に導出することができず，数値計算やシミュレーションなどで近似的に求める方法しかない．2 次元反射型ランダムウォークの定常分布をコンピュータで数値計算をする際に状態の切断が必要であり，定常分布の理論値と誤差が生じやすくなる．それを評価するため，本研究では定常分布の理論値と切断を行った定常分布の誤差上界を定義し導出を行った．この誤差上界により，数値計算の精度を定量的に評価することが可能である．誤差上界は，リヤプノフ関数と積率母関数の定常方程式を使い，導出することができる．

次に本研究では，一般型 2 次元反射型ランダムウォークの定常分布の漸近特性について考察した．2 次元反射型ランダムウォークの推移図を見てみると，例えば(1,0)という状態は 1 つのみで，その状態から次の状態への移動が「推移確率」で行われている．この(1,0)という状態に，有限個の背後状態を付ける．すると，(1,0)という状態から，他の状態((1,0)から(1,0)に戻るのも含める)への移動が「推移確率」ではなく「推移確率行列」で行われる．この行列は，有限次元の行列であり，推移は現在の背後状態から次の背後状態の推移を表す．その背後状態の推移とともに，主状態(1,0)がどのように動くかを記述することが可能である．本研究では，この 2 次元反射型ランダムウォークを一般化 2 次元反射型ランダムウォークと呼ぶこととする．研究の目的の節でも述べたように，文献⑤で一般化 2 次元反射型ランダムウォークの定常分布の漸近特性の導出を行っている．しかし，漸近特性は一部しか求まっていないため，本研究でその結果の拡張を行った．漸近特性を求める方法は，文献③，④などで行われている，定常分布の積率母関数の収束領域を活用した．その収束領域は，文献③，④とは違い，複素関数論における解析接続による新たな証明方法で導出した．

４．研究成果

本研究では

(1) 2 次元反射型ランダムウォークの定常分布の誤差上界
(2) 一般化 2 次元反射型ランダムウォークの定常分布の漸近特性

を導出した．(1)では，2 次元反射型ランダムウォークの推移確率に対して，適切な仮定のもと，誤差がある関数で抑えられることを示した．この研究により，2 次元反射型ランダムウォークの切断を行った際の数値計算の誤差を評価することが可能である．(2)では，文献⑤の仮定を緩め，求められなかった場合について，定常分布の漸近特性を求めた．この研究により，一般化 2 次元反射型ランダムウォークの定常分布の漸近特性をほぼ求めることができ，漸近特性の問題は解決したと言える．

今後の課題としては，(1)については，仮定を緩め，一般の場合における誤差上界を求めることが必須となる．一般の場合の関数は，非常に複雑となると予想されるが，証明に用いたリヤプノフ関数と積率母関数の定常方程式については，一般の場合でも活用できると予想される．(2)については，一般化 2 次元反射型ランダムウォークの定常分布の漸近特性を全ての場合について求めることが第 1 の課題となる．文献③では，任意方向の定常分布の漸近特性を求めているが，一般化 2 次元反射型ランダムウォークについても，任意方向に対する結果の導出をしたいと思っている．

また(1)や(2)のさらなる一般化として，次元の一般化，すなわち 3 次元以上の反射型ランダムウォークについて，定常分布の特性を求めることも今後の課題となる．3 次元以上の反射型ランダムダムウォークの定常分布に対する理論的結果はほとんど存在しない．よって，誤差上界や漸近特性のみならず，定常分布の存在条件，陽表現を持つ十分条件，裾が軽い条件，拡散近似などの導出など多方面からのアプローチをしなければならないと考えている．

<引用文献>

① Borovkov, A.A. and Mogul’Skii, A.A. (2001) Large deviations forMarkov chains in the positive quadrant. 891Russ. Math. Surv. 56, 803-916.

② Fayolle, G., Malyshev, V. and Menshikov, M. (1995) Topics in the constructive theory of countable Markov chains. Cambridge University Press.

③ Kobayashi, M. and Miyazawa, M. (2013) Revisiting the tail asymptotics of the double QBD process: Refinement and complete solutions for the coordinate and diagonal directions. In Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models (G. Latouche, V. Ramaswami, J. Sethuraman, K. Sigman, M. S. Squillante and D. D. Yao, eds.). Springer, New York, 145-185.

④ Kobayashi, M. and Miyazawa, M. (2014) Tail asymptotics of the stationary distribution of a two dimensional reflecting random walk with unbounded upward jumps. Advances in Applied probability, 46 365-399.

⑤ Ozawa, T. (2013) Asymptotics for the stationary distribution in a discrete-time two-dimensional quasi-birth-and-death process. Queueing Systems 74, 109-149.

⑥ Ozawa, T. (2019) Stability condition of a two-dimensional QBD process and its application to estimation of efficiency for two-queue models, Performance Evaluation, 130, 101-118.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　1　件）

① Ozawa, T. and Kobayashi, M. (2018) Exact asymptotic formulae of the stationary distribution of a discrete-time two-dimensional QBD process, Queueing Systems, 90, 351-403.

〔学会発表〕（計　6　件）

① Ozawa, T. and Kobayashi, M. (2018) Exact asymptotic formulae of the stationary distribution of a discrete-time two-dimensional QBD process, Proceeding of 12th International Conference on Queueing Theory and Network Applications, Yanshan University, Chaina.

② 小林　正弘 (2018) 反射型ランダムウォークと幾何，第 279 回待ち行列研究部会.

③ 小沢 利久，小林 正弘 (2018) 3 次元反射型ランダムウォークにおける定常分布の母関数の収束領域に関する予想，日本オペレーションズ・リサーチ学会　2018 年秋季研究発表会.

④ 小林 正弘，宮沢 政清，小沢 利久 (2018) 2 次元反射型ランダムウォークにおける定常分布の積率母関数の収束領域，日本オペレーションズ・リサーチ学会　2018 年春季研究発表会.

⑤ 小林 正弘，宮沢 政清，小沢 利久 (2018) 2 次元反射型ランダムウォークにおける定常分布の積率母関数の収束領域，2017 年度待ち行列シンポジウム.

⑥ Kobayashi, M., Masuyama, H., Sakuma, Y., Inoie, A. (2017) Error bound for the QBD approximation of a two dimensional reflecting random walk, IFORS 2017, Quebec city convention center, Canada.

⑦ Masuyama, H., Sakuma, Y., Kobayashi, M. (2016) Simple error bounds for the QBD approximation of a special class of two dimensional reflecting random walks, Proceeding of 11th International Conference on Queueing Theory and Network Applications, Victoria University of Wellingt, New Zealand.

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：宮沢 政清
ローマ字氏名：Masakiyo Miyazawa

研究協力者氏名：小沢 利久
ローマ字氏名：Toshihisa Ozawa

研究協力者氏名：増山 博行
ローマ字氏名：Hiroyuki Masuyama

研究協力者氏名：井家 敦
ローマ字氏名： Atsushi Inoie

研究協力者氏名：佐久間 大
ローマ字氏名：Yutaka Sakuma