

令和 6 年 6 月 9 日現在

機関番号：34304

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K18229

研究課題名（和文）新たな離散可積分系の導出と逆固有値問題への応用

研究課題名（英文）Derivation of new discrete integrable systems and its applications to inverse eigenvalue problems

研究代表者

赤岩 香苗 (Akaiwa, Kanae)

京都産業大学・情報理工学部・准教授

研究者番号：30771878

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：指定した固有値をもつ行列を作成する問題を逆固有値問題という。すべての小行列式が非負である全非負（totally nonnegative, TN）行列の逆固有値問題の解法はほとんど知られていない。具体的に解を書き下せる非線形方程式を可積分系と呼ぶ。可積分系の時間変数を離散化した方程式を離散可積分系といい、代表的な離散可積分系として離散戸田方程式が知られている。本研究課題では、任意の帯幅をもつ帯TN行列、ローラン-ヤコビ行列と呼ばれるジグザグ構造をもつTN行列の逆固有値問題に対して、それぞれ簡約条件付き離散2次元戸田方程式、離散相対論戸田方程式に基づき解法の定式化に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

逆固有値問題研究の多くは行列解析分野からのアプローチであり、ある固有値をもつ行列の性質や特定のサイズ・特徴についての研究が多い。本研究のように、指定した固有値をもつ行列を具体的に作成する手法は珍しいため、可積分系分野だけでなく行列解析分野へも貢献できる。近似解ではなく厳密解を有限回反復で求められることも大きな特色である。提案手法はパラメータの条件を緩めればTN行列以外の行列も作成可能なため汎用性が高い。TN行列が現れる建築物の構造解析等の実問題はもちろんのこと、他の工学的・理学的問題への応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：Inverse eigenvalue problems (IEPs) are problems to construct matrices with prescribed eigenvalues. Especially, it is difficult to solve IEPs for totally nonnegative (TN) matrices, where all minors are nonzero.

Nonlinear equations whose solutions are explicitly expressed are called integrable systems, and time-discretization of integrable systems are discrete integrable systems. One of typical discrete integrable systems is discrete Toda equation.

In this research, we proposed new algorithms to solve IEPs for a band TN matrix with an arbitrary bandwidth, and a TN matrix with zig-zag structure called Laurent-Jacobi matrix based on discrete two-dimensional Toda equation with a reduction condition, and discrete relativistic Toda equation, respectively.

研究分野：応用可積分系

キーワード：逆固有値問題 全非負行列 離散可積分系 直交多項式

1. 研究開始当初の背景

(1)【逆固有値問題】行列固有値問題は、数値線形代数分野における主要な話題である。 m 次正方行列 A に対して $Ax = \lambda x$ を満たす固有値 λ と固有ベクトル x を求める固有値問題は現在も盛んに研究されている。一方、指定した固有値 λ をもつ行列 A を構成する問題を逆固有値問題と呼ぶ。逆固有値問題は、制御における極配置問題や原子構造計算といった工学面の問題でも多くの応用がある。逆固有値問題は構成する行列の形や行列のもつべき性質によって分類され、制約の種類によって難易度が大きく変わる。一般に逆固有値問題は非線形かつ非適切な問題で、固有値問題より難しい問題である [1]。全非負 (totally nonnegative, TN) 行列はすべての小行列式が非負の行列であり、統計数学や確率過程、組合せ論など多くの場面で現れる。また、TN 行列の逆固有値問題は、建築分野の梁の振動を表す問題に現れることが知られている。行列の逆固有値問題の解法を考えることは理論だけでなく応用上も重要である。しかしながら、単純な相似変形では「すべての小行列式が非負である」という性質 (TN 性) は簡単に崩れてしまうため、TN 行列に対する逆固有値問題を解くことは困難とされてきた。

(2)【可積分系と固有値問題】可積分系とは、厳密解を明示的に書き下せる非線形力学系の総称である。特に、時間変数が離散的であるものを離散可積分系と呼ぶ。代表的な離散可積分系の 1 つに、離散戸田方程式がある。離散戸田方程式は、3 重対角行列に対する固有値計算法として有名な商差 (quotient-difference, qd) 法の漸化式と等価であることが知られている。離散戸田方程式は、離散 2 次元戸田方程式の簡約化の 1 つであり、離散 2 次元戸田方程式の他の簡約化である離散ハングリー戸田方程式と multiple qd 法の漸化式から、それぞれ上ヘッセンベルグ TN 行列と非対称帯 TN 行列の固有値計算法が定式化されている。

(3)【可積分系と逆固有値問題】これまでの研究でいくつかの離散可積分系と TN 行列の逆固有値問題の対応を明らかにしてきた。そこでは、離散可積分系の解が行列式で書ける、行列式は固有値と任意定数を用いて減算のない和の形で展開できるという性質を利用して、戸田型の離散可積分系と TN 行列の対応を明らかにしてきた。離散可積分系に基づく解法は、有限回の反復によって厳密解、すなわち、指定した固有値をもつ行列を構成できるという、他の解法ではあまり見られない特長を有している。

multiple qd 法は [4] より一般的な非対称帯 TN 行列のための固有値計算法である。漸化式は離散 2 次元戸田方程式の簡約化であり、行列式解も既知である。このことから、[4] で用いた手法を適用することで、multiple qd 法の漸化式に基づく非対称帯 TN 行列の逆固有値問題の解法が定式化可能であると考えた。申請者の最近の研究において、離散戸田方程式の初期値の自由度と一般解に含まれるパラメータの個数の関係を考えることで、構成する行列の要素をいくつか指定可能であることが分かった。以上の関係から、指定した固有値と要素をもつ行列を構成する問題は逆固有値問題の 1 つであり、要素指定付き逆固有値問題の解法も構築が可能であるという着想を得た。

2. 研究の目的

可積分系のもつ解構造や正值性といった「よい性質」を利用して、非対称帯 TN 行列の逆固有値問題の解法の定式化を行ってきた。本研究では、これまで得られた知見をもとに、以下の 3 項目を目的とした。

- (1) [4] で扱える行列よりも一般的な非対称帯 TN 行列の逆固有値問題の解法を定式化する。
具体的には、[4] では上帯幅と下帯幅が互いに素でない場合、構成される行列が、ある行列のべき乗になってしまう欠点があった。本研究では、上帯幅と下帯幅が互いに素でない場合に、ある行列のべき乗にならないような、より一般的な構造をもつ非対称帯 TN 行列を作成する手法を開発することを目指した。
- (2) 階段 TN 行列を対象とした逆固有値問題の解法を開発する。
これまでの研究では、帯行列を対象とした逆固有値問題の解法の定式化を行ってきた。本研究では、帯行列の枠組みを超え、階段状 (ジグザグ) 構造をもつような行列の逆固有値問題の解法の定式化を行うことを目的とした。
- (3) 固有値だけでなく行列の要素を指定する逆固有値問題に対しても解法を新たに定式化する。
これまでの研究では、全固有値およびパラメータを指定することで、行列の要素を決定していた。固有値・パラメータと行列の要素の関係に着目することで、全固有値と一部の要素を指定した逆固有値問題の解法を定式化することを目的とした。

3. 研究の方法

(1) 非対称帯 TN 行列の逆固有値問題

2 次元戸田方程式の簡約化である離散可積分系 (multiple qd 法の漸化式) から新たに逆固有値問題の解法を開発する。対象となる multiple qd 法については、漸化式が簡約条件付きの離散 2 次元戸田方程式と一致することと行列式解が既に知られているため、[4] の手法をそのまま援用で

きると想定された。

(2) 階段 TN 行列の逆固有値問題

既知の直交多項式(ローラン双直交多項式および直交ローラン多項式)を組合せることで階段 TN 行列(ジグザグ構造をもつ 5 重対角行列)の標準固有値問題を記述した。ローラン双直交多項式と関連する離散相対論戸田方程式を用いて、階段 TN 行列を対象とする逆固有値問題の解法の定式化を進めた。

(3) 固有値だけでなく行列の要素を指定する逆固有値問題の解法

既に結果を得ている離散戸田方程式に加え、離散ハングリー戸田方程式および拡張型離散ハングリー戸田方程式の初期値と一般解のパラメータの 1 対 1 対応を調べる。固有値だけでなく要素となる初期値を指定することで、要素指定付きの逆固有値問題に対する解法を定式化した。固有値だけでなく、一部の要素を指定する場合も有限回の反復で厳密解(行列)が得られるという特徴を有することを確認した。

4. 研究成果

3 項目について、以下のような研究成果を得た。

(1) 非対称帯 TN 行列の逆固有値問題

[4]の一般化として、任意の帯幅をもつ帯行列の逆固有値問題の解法を定式化した。定式化にあたって、拡張型離散ハングリー戸田方程式の一般化である簡約条件付きの離散 2 次元戸田方程式を利用した。[4]から解を記述する任意定数の数が増えており、より一般の構造をもつ行列を作成することができるようになった点が特徴である。これまでの任意定数の与え方を用いると提案手法は論文[4]の解法に簡約化されてしまうことが分かった。提案法において、作成される行列が全非負行列となる新たな任意定数の与え方を提案することで、上述の問題の解決に至っている。本研究成果は、国際英文論文誌 Electronic Journal of Linear Algebra に採録された。

(2) 階段 TN 行列の逆固有値問題

ローラン双直交多項式(離散相対論的戸田方程式)に基づき、ジグザグ構造をもつ 5 重対角行列(ローラン-ヤコビ行列)の逆固有値問題の解法を定式化した。特に、ローラン双直交多項式は 2 重対角行列束に関する一般化固有値問題と対応することは知られていたが、標準固有値問題との対応は知られていなかった。本研究では、直交ローラン多項式と組合せてローラン双直交多項式に変数変換を施すことで、特殊の形をもつローラン-ヤコビ行列の標準固有値問題が記述できるという知見を得た。提案手法では、非対称および対称なローラン-ヤコビ行列が構成が可能であり、2 つの行列間の相似変換についても求めた。本研究成果の一部は、研究集会講究録に掲載されており、より詳細な結果を国際論文誌に投稿予定である。

(3) 固有値だけでなく行列の要素を指定する逆固有値問題の解法

全固有値と一部の要素を指定し 3 重対角行列を作成する逆固有値問題について、離散戸田方程式を用いた解法を提案している。提案手法では、行列式解と、行列式解を記述する固有値および任意定数の 1 対 1 対応を示すことで、要素を指定することが可能となった。本研究成果は、研究集会講究録に掲載された。

参考文献

- [1] M.T. Chu and C.G. Golub, Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications, 2005.
- [2] Fukuda et al., The discrete hungry Lotka-Volterra system and a new algorithm for computing matrix eigenvalues, Inverse Problems, 25 (2009), 015007.
- [3] Y. Yamamoto and T. Fukaya, Differential qd algorithm for totally nonnegative matrices, JSIAM Letters, 1 (2009), 56-59.
- [4] K. Akaiwa, Y. Nakamura, M. Iwasaki, A. Yoshida and K. Kondo, An arbitrary band structure construction of totally nonnegative matrices with prescribed eigenvalues, Numer. Algor., 75 (2017), 1079-1101.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Kanae Akaiwa, Akira Yoshida, Koichi Kondo	4. 巻 38
2. 論文標題 An improved algorithm for solving an inverse eigenvalue problem for band matrices	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Linear Algebra	6. 最初と最後の頁 745-759
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.13001/ela.2022.7475	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 赤岩 香苗, 前田 一貴	4. 巻 2019A0-S2
2. 論文標題 Totally nonnegativeなLaurent-Jacobi行列の逆固有値問題の解法について	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 九州大学応用力学研究所研究集会報告	6. 最初と最後の頁 157-162
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 赤岩 香苗, 谷口 雄大, 近藤弘一	4. 巻 29A0-S7
2. 論文標題 離散戸田方程式を用いた要素および固有値が指定された逆固有値問題の解法	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 研究集会報告 非線形波動研究の新潮流－理論とその応用－	6. 最初と最後の頁 101-106
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kanae Akaiwa, Yoshimasa Nakamura, Masashi Iwasaki, Akira Yoshida, Koichi Kondo	4. 巻 75
2. 論文標題 An arbitrary band structure construction of totally nonnegative matrices with prescribed eigenvalues	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Numerical Algorithms	6. 最初と最後の頁 1079-1101
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11075-016-0231-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masato Shinjo, Kanae Akaiwa, Masashi Iwasaki, Yoshimasa Nakamura	4. 巻 10
2. 論文標題 An extended Fibonacci sequence associated with the discrete hungry Lotka-Volterra system	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Journal of Biomathematics	6. 最初と最後の頁 1750043
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793524517500437	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Kanae Akaiwa
2. 発表標題 Solving An Inverse Eigenvalue Problem via Discrete Integrable Systems
3. 学会等名 SIAM Conference on Applied Linear Algebra (LA24) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 藤井 朝, 赤岩 香苗
2. 発表標題 日本プロ野球における最高のアベレージヒッターの検討
3. 学会等名 第21回計算数学研究会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 赤岩 香苗
2. 発表標題 可積分系と行列固有値問題
3. 学会等名 日本応用数理学会 第3回若手研究交流会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 赤岩 香苗
2. 発表標題 離散可積分系とある種の構造をもつ行列の逆固有値問題
3. 学会等名 明治非線型数理サマ－セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岡鼻 小春, 赤岩 香苗
2. 発表標題 離散2次元戸田方程式に基づく逆固有値問題の解法を用いた帯TN行列の作成
3. 学会等名 2020年度日本応用数理学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kanae Akaiwa
2. 発表標題 Construction of Laurent-Jacobi matrices with prescribed eigenvalues via orthogonal polynomials
3. 学会等名 China-Japan Workshop on Integrable Systems 2019 (CJJWIS2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 赤岩 香苗
2. 発表標題 可積分系と行列固有値問題
3. 学会等名 2019年度日本応用数理学会年会 若手の会 分野横断型研究交流会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kanae Akaiwa, Kazuki Maeda
2. 発表標題 An inverse eigenvalue problem for pentadiagonal oscillatory matrices
3. 学会等名 International Conference on Matrix Analysis and its Applications (MAT TRIAD2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 赤岩 香苗, 前田 一貴
2. 発表標題 Totally nonnegativeなLaurent-Jacobi行列の逆固有値問題の解法について
3. 学会等名 令和元年度 九州大学応用力学研究所 共同利用研究集会 非線形波動研究の多様性
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kanae Akaiwa, Koichi Kondo
2. 発表標題 An inverse eigenvalue problem for lower Hessenberg matrices with prescribed entries
3. 学会等名 SIAM Conference on Applied Linear Algebra (SIAM-ALA2018) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kanae Akaiwa, Koichi Kondo
2. 発表標題 An approach to inverse eigenvalue problems from discrete integrable systems
3. 学会等名 Symmetries and Integrability of Differential Equations (SIDE13) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 赤岩 香苗
2. 発表標題 離散可積分系から見る行列の逆固有値問題
3. 学会等名 津田塾大学 数学・計算機科学研究所 研究集会「離散力学系と組合せ論」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 赤岩 香苗, 前田 一貴
2. 発表標題 ある種の帯行列の逆固有値問題の解法について
3. 学会等名 2019年度日本応用数学会連合発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kanae Akaiwa
2. 発表標題 Solving inverse eigenvalue problems for totally nonnegative matrices with finite steps
3. 学会等名 International Conference on Matrix Analysis and its Applications (MAT TRIAD2017) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 赤岩 香苗, 谷口 雄大, 近藤 弘一
2. 発表標題 離散戸田方程式を用いた要素および固有値が指定された逆固有値問題の解法
3. 学会等名 平成29年度 九州大学応用力学研究所 共同利用研究集会「非線形波動研究の新潮流 理論とその応用」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 赤岩 香苗, 谷口 雄大, 近藤 弘一
2. 発表標題 I型離散ハングリー戸田方程式を用いた固有値および要素を指定した上ヘッセンベルグ行列の構成法
3. 学会等名 日本応用数理学会2018年度研究部会連合発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kanae Akaiwa, Koichi Kondo
2. 発表標題 An Inverse Eigenvalue Problem for Lower Hessenberg Matrices with Prescribed Entries
3. 学会等名 SIAM Conference on Applied Linear Algebra (SIAM-ALA18) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------