様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ７ 月　 ８ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：挑戦的研究（萌芽）
研究期間：2017～2019
課題番号：１７Ｋ１８５５３

研究課題名（和文）Applications of Category Theory to Games and Economic Behavior

研究課題名（英文）Applications of Category Theory to Games and Economic Behavior

研究代表者
Ｓ．Ｊ　Ｔｕｒｎｂｕｌｌ（Turnbull, Stephen John）

筑波大学・システム情報系・准教授

研究者番号：９０２４０６２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：ゲーム論とは社会と経済における戦略的行動の分析に役立つ数学の分野である。圏論という数学分野では数学における構造の分析、比較、と変換を行う。
本研究ではまず戦略型非協力的ゲーム圏を２つ定義する。このゲーム圏でゲームの構造を分析する。両ゲーム圏ではゲームを混合延長ゲームに変換する過程は関手である。混合延長関手に相当する忘却関手は右随伴関手であり、モナディックであることを証明した。この忘却関数は戦略の確立分布構造を無視する。ゲーム圏の応用としてゲーム圏論での同型類が2x2行列型ゲームの古典的分類に同じことを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
混合延長関手の忘却関手はモナディックという定理の異義とは混合延長ゲームが戦略が確率分布で報酬関数が線形型である特別ゲームの種類でありながらすべてのゲームの行動をモデル化できることを証明する。重要点は社会現象をモデル化する一般のゲームに均衡が存在しない場合があるが、そのゲームの混合延長には均衡が存在する。
ランダム行動の解釈が困難の場合があるが、解釈が明らかの場合もある。だが、均衡のないゲームには解釈がないのでゲームその混合延長の関係の理解を深めることが大きな貢献と考えられる。

研究成果の概要（英文）：Game theory is a branch of mathematics useful in understanding strategic behavior in society, especially economic behavior. Category theory is a set of tools for analyzing and comparing mathematical structures, and for translating from one kind of structure to another. In this exploratory research, we first define two categories of noncooperative games in strategic form. We use these categories to examine the structure of such games, showing in both categories that when the functor extending a game to its mixed extension is paired with its right adjoint forgetful functor (the process of treating the extended game as a game, without using the fact that its strategies are probability distributions), the forgetful functor is monadic. We show that category-theoretic isomorphism classes reproduce the traditional classification of 2x2 matrix games.

研究分野：理論経済学

キーワード：圏論　ゲーム圏　モナド　 混合延長　category theory　game category　monad　mixed extension

１．研究開始当初の背景

圏論は数学的構造を分析・比較・変換に役立つ強力な統一ツールセットを提供する。1985 年から非常に活発的に研究されながら膨大な先行研究がある。1985 年頃から、圏論的方法に似ている方法を用いるゲーム理論研究が多くある。Shannon と Milgrom が定義した戦略的代替の概念は例として挙げられる。動学的過程を圏に変換して分析を行う手法が有力のでゲームを変換して分析する研究が多くある。しかし、ゲームを圏のオブジェクトとして分析する研究は意外と見つからなかった。

２．研究の目的

この研究プロジェクトの目的の説明は簡単である。

1. ゲーム理論と理論社会科学の研究で役立つ非協力ゲームの圏を定義する。
2. 均衡の存在を保証するために使用される混合拡張が関手であることを証明する。
3. 混合延長関手に相当する忘却関手は右随伴関数でモナディックであることを証明する。
4. このフレームワークによりいくつかの古典的な結果は証明できることを示す。
5. 一部のゲームのクラスの間にどのよう関係が存在するかの正確な定義とその圏論的分析を提供する。

忘却関手がモナディックであることを証明することは重要である。なぜなら、その結果によってすべての一般的なゲームで可能な動作は部分圏である混合拡張ゲーム圏で反映される。事実として明白なように見えるが、今まで数学的な定義や証明は与えられていません。さらに、戦略セットはコンパクトで凸型な確率分布のセットであり、ペイオフ関数が線形であることを考えれば一般ゲームと比べて混合拡張ゲームは非常に特殊である。圏論における手法を応用可能な課題はこれからも考えるが、圏論を使用して証明された既存結果のいくつかの例は、圏論的分析結果が既存のゲーム理論分析結果と一致するという確信を提供する。最後の課題について圏論を使用してさらなる研究を動機付けるには、新しい応用分析が可能であることを示さなければならない。

３．研究の方法

圏を定義するには、オブジェクトと射のそれぞれのコレクション、および射の恒等と合成規則を与える必要があります。オブジェクトはゲームにするが、ゲームにはさまざまな形態がある。協力的ゲームも非協力的もあり、戦略的ゲームも展開型ゲームもある。この挑戦的研究は、戦略的な 2 プレイヤー非協力ゲームに限って焦点を当てる。n プレーヤーゲームへの拡張は単純であろうと予想できるが、n プレーヤーゲームと m プレーヤーゲームを比較するときに生じる問題は複雑で現段階で避けることにした。プレーヤー集合はすべてのゲームにおいて同じものとして扱う。つまり、2 人のプレーヤーは多くの異なるゲームをプレイする。この仮定では、一般性を失うことはない。

射のセットが異なる２つの圏を定義する。射は、あるゲームのプレーヤーの戦略を別のゲームのそのプレーヤーの戦略にマッピングする単調関数にする。S と u はプレーヤー1 の戦略とペイオフ関数を示し、T と v はプレーヤー2 の戦略とペイオフ関数を示する。射 $f: SxT \to S'xT'$ は $(s,t) \to (\sigma, \tau)$ をマッピングし、σ は s のみに依存し、及び τ は t のみに依存する。ゲームの戦略的圏では、プレイヤー2 の各戦略 t を固定して $u(s,t) > u(\sigma, \tau)$ の場合には $u(f(s,t)) > u(f(\sigma,t))$ がなり立て、そしてプレイヤー2 が同様な条件を満たすと単調性を満たすという。ゲームの福祉圏の場合、同じ方法で定義されている射 f は全戦略 (s,t) 及び (σ, τ) が $u(s,t) > u(\sigma, \tau)$ なら $u(f(s,t)) > u(f(\sigma, \tau))$ にならなければなく、そしてプレイヤー2 が同様な条件を満たさなければならない。各々の圏の恒等射は普通の恒等関数にし、合成は、関数の通常の合成にする。これらの定義が圏を構成することの証明は、直接計算であるという意味で簡単である。福祉ゲームの圏は、明確に戦略ゲームの圏のワイド部分圏である。

　これらの定義を前提として、混合拡張は通常の方法で定義され、関手のオブジェクト部分になる。混合拡張ゲームのセットは、ゲームのセットの適切なサブセットであり、そのセットにゲームのいずれかの圏からの射を装備することで、部分圏が定義されます。関手の射部分は戦略の凸状の組合せを混合延長でイメージゲームで「同じ」凸状の組み合わせにマッピングすることにより定義する。これらの条件が関手を定義することの証明も直接計算である。

　混合拡張の定義は基本的に戦略空間の凸構造を使用し、射の単調性の証明はペイオフ関数の線形性を使用するが、混合拡張ゲームの均衡の定義は凸情勢にも線形性にも言及しないことが注意すべき。それで忘却関手の定義は明確でる。その定義が関手の条件を満たす証明は簡単な計算である。忘却関数が混合拡張関手の右随伴艦首であることは、もう一つの計算で証明する。戦

略的ゲーム圏と福祉ゲーム圏の忘却関手がモナディックであることはベックの定理を応用して証明する。

　ほとんどの応用分析は深い圏論的定理を使用しない直接計算である。ただし、圏論の言葉を使用すると、場合によって明確になることがある。特に忘却関手のモナディシティ定理はそうである。以前述べたように、モナディシティ定理は、混合拡張の圏は、すべてのゲームの真部分集合であっても、すべてのゲーム理論分析に十分であると解釈することができる。これは、明白な概念でありながら、以前には数学的な記述がなかった。圏論でそれは厳密に証明できる。

４．研究成果

残念なことに、ゲーム理論と数理経済学の主要なジャーナルは投稿を拒否した。ほとんどの結果は先行研究に存在し、単に圏論的言語で言い換えられているだけであることを指摘した。圏論は、ほとんどのゲーム理論家や数理経済学者にとってなじみのないものであるため、貢献は不十分であると判断された。モナディシティ定理の場合でさえ、概念自体はゲーム理論の観点から明らかに動機づけられておらず、圏論におけるその重要性は無関係であると考え、軽視した。結果を専門的な「レタージャーナル」への投稿用に再構成中である（ドラフト [1] および [2] を参照）。進行中の研究では、ゲーム圏の圏論的構造を調べて、既知の定理の代替解釈を提供したり、ゲームを比較したり、ゲーム集合ごとを特徴付けたりすることにより、ゲーム理論の新しいアイデアを見つけようと考えておる。M.吉田との共同作業 [3] は、従来の分析手法を使用していますが、異なるゲームを比較および対比するという同じ考え方が動機になっています。

　多くの結果が n プレーヤーゲームに拡張されていますが、n プレーヤーゲームと m プレーヤーゲームの比較の動機と解釈は、まだ十分に理解されていません。最後に、広範なゲームの圏の定義と、それらのゲームと戦略形式のゲームとの比較は、多くの「均衡の精緻化」の概念間の関係を特徴づけるという点で有益であると期待する。

[1] TURNBULL, Stephen J. [2020] "'Forgetting' the Mixed Extension is Monadic." https://turnbull.sk.tsukuba.ac.jp/Research/GameCategory/MixedExtensionMonadic.pdf

[2] TURNBULL, Stephen J. [2020] "Classifying Matrix Games with Isomorphisms." https://turnbull.sk.tsukuba.ac.jp/Research/GameCategory/ClassificationByIsomorphism.pdf

[3] YOSHIDA, Masatoshi and Stephen J. TURNBULL [2020] "Voluntary Provision of Environmental Offsets under Monopolistic Competition." Revised and resubmitted to *International Journal of Tax and Public Finance.*

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考