

令和 2 年 6 月 11 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2017～2019

課題番号：17K18723

研究課題名（和文）Grothendieckの変動的ホッジ予想への新アプローチ

研究課題名（英文）A new approach to Grothendieck's variational Hodge conjecture

研究代表者

齋藤 秀司 (Saito, Shuji)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：50153804

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 5,000,000円

研究成果の概要（和文）：ホッジ予想はクレイ研究所が提出したミレニアム問題のひとつである。変動的ホッジ予想は、ホッジ予想よりは弱い予想であるが、アーベル多様体にたいしては同値である。最近の進展によりこの問題は、形式的スキームの代数的K群にたいする代数化の問題に帰着された。これはGrothendieckの偉業である形式的存在定理を大きく一般化する難題でこれまで一般的アプローチは知られていなかった。本研究は、リジッド解析空間のK理論を新たに構築することにより、リジッド解析的手法を上記の問題に適用する新たな道筋を開いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ホッジ予想が数学の最重要問題のひとつであることに異論はない。クレイ研究所がミレニアム問題の一つとして100万米ドルの懸賞金をかけたこともその理由の一つである。変動的ホッジ予想は、ホッジ予想よりは弱い予想であるが、これに対する新たな結果はホッジ予想に対する重要な進展をもたらすことが期待される。最近の進展によりこの問題は、形式的スキームの代数的K群にたいする代数化の問題に帰着されたが、これについての一般的なアプローチは知られていない。本研究の意義は、リジッド解析空間のK理論を構築することにより、リジッド解析的手法をこの難問に適用するという全く新しいアイデアにもとづくアプローチを与えたことにある。

研究成果の概要（英文）：Hodge conjecture is one of the most important open problems in mathematics. It implies Grothendieck's variational Hodge conjecture while they are equivalent for abelian varieties. By a recent development, the latter conjecture is reduced to the so-called the algebrization problem of algebraic K-theory of formal schemes. This is a vast generalization of Grothendieck's formal existence theorem and is wide open. In our research program, we propose a completely new approach to this problem by introducing a new K-theory for rigid analytic spaces, which brings about possibilities to apply the rigid analytic geometry to the algebrization problem.

研究分野：数論幾何学，代数幾何学

キーワード：K理論 リジッド解析空間

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ホッジ予想はクレイ研究所が提出したミレニアム問題のひとつである。変動的ホッジ予想は、ホッジ予想よりは弱い予想であるが、アーベル多様体にたいしては同値である。最近の進展により問題は、「形式的スキームの代数的 K 群にたいする代数化」の問題に帰着される。これは Grothendieck の偉業である形式的存在定理を大きく一般化する難題でこれまで一般的アプローチは知られていなかった。本研究は、リジッド解析空間の K 理論を新たに構築することにより、リジッド解析的手法を上記の問題に適用する新たな道筋を開いた。

2. 研究の目的

最近まで Grothendieck の変動的ホッジ予想にたいする一般的なアプローチは発見されていなかったが、Bloch-Esnault-Kerz と Morrow が変動的ホッジ予想の無限小変形部分を解決した。変動的ホッジ予想を解決するため残された問題は形式的スキームの代数的 K 群の代数化である。本研究の目的は、リジッド解析空間の K 理論の構築という全く新しい視点からこの問題にアプローチし、形式的スキームの代数的 K 群の代数化の問題に進展をもたらすことである。

3. 研究の方法

本研究は代数幾何や数論幾何の様々な対象を多角的かつ有機的に研究している。研究手法は、Hodge 理論、 p -進 Hodge 理論、エタールコホモロジー理論、リジッド解析幾何、ホモトピー代数など現代数学の様々な手法を交錯させ駆使するものである。基礎理論の構築という大きなスケールにおいて研究が進められている。研究目的達成のために、国内外の研究協力者との活発な研究交流にもとづくグローバルな研究協力体制を構築している。

4. 研究成果

標数 0 の体 k 上の一変数級数環 $R = k[[t]]$ とその商体 $K = k((t))$ を考える。 X は $S = \text{Spec}R$ 上の射影的で滑らかなスキーム、 $Y = X \otimes_R R/(t)$ をその特殊ファイバーとし、制限写像 $\iota: K_0(X) \rightarrow K_0(Y)$ を考える。ここで一般にスキーム Z にたいし $K_0(Z)$ は Z 上のベクトル束全体の Grothendieck 群である。Grothendieck の変動的ホッジ予想とは、 $K_0(Y)$ の元 α を $K_0(X)$ に持ち上げるための必要十分条件を、 α のホッジ理論的条件によって与えるものである。ホッジ予想は変動的ホッジ予想を導く。アーベル多様体にたいしては両者は同値である。整数 $n > 0$ にたいし $X_n = X \otimes_R R/(t^n)$ (Y の thickening) の Grothendieck 群の逆系

$$K_0^{cont}(X) := \{K_0(X_n)\}_{n \geq 0}$$

とその逆極限 $\hat{K}_0(X)$ にたいし, 写像 ι が $K_0(X) \rightarrow \hat{K}_0(X) \rightarrow K_0(Y)$ と分解し, $\alpha \in K_0(Y)$ の持ち上げのプロセスを2段階に分けることができる. 最初の持ち上げを無限小変形持ち上げ, 次の持ち上げを代数化とよぶ. Bloch-Esnault-Kerz と Morrow は, 前者の問題をほぼ解決することに成功した. 残された代数化の問題は, Grothendieck の偉業である Formal Existence Theorem を大きく一般化する難題である. 本研究では, この問題に対するして新たなアプローチを提出する.

以下, R を完備離付値環, π をその素元, K をその商体とする. 上で考察した $R = k[[t]]$ と $K = k((t))$ はこの例である. X を $S = \text{Spec}R$ 上の (射影的とも滑らかとも限らない) 形式的スキームとし, $X_n = X \otimes_R R/(\pi^n)$ とおく. 本研究者は, 高次 K 群の逆系

$$K_j^{cont}(X) := \{K_j(X_n)\}_{n \geq 0}$$

をリジッド解析幾何を用いて解析する新しい理論を構成した. \mathbf{Spt} をスペクトラ全体の圏とし, \mathbf{pSpt} でスペクトラの逆系全体の圏とする. \mathbf{pSpt} の対象 $S = (S_i)_{(i \in I)}$ にたいしその j 次ホモトピー群をアーベル群の逆系 $\pi_j(S) = \{\pi_j(S_i)\}_{i \in I}$ として定義する. ここで $\pi_j(S_i)$ は S_j の安定ホモトピー群である. 最初の主定理は以下のとおりである.

定理 1 : \mathbf{Rig} を K 上準コンパクトかつ分離的なリジッド解析空間のなす圏とする. このとき半変関手 $\text{KH}^{an} : \mathbf{Rig} \rightarrow \mathbf{pSpt}$ が存在し次の性質を持つ. $\mathcal{X} \in \mathbf{Rig}$ と, \mathcal{X} の R 上の形式的スキームのモデル X で正則なものにたいし, アーベル群の逆系の長完全系列

$$\cdots \rightarrow K_{j+1}^{cont}(X) \rightarrow \text{KH}_{j+1}^{an}(\mathcal{X}) \rightarrow G_j(Y) \rightarrow K_j^{cont}(X) \rightarrow \text{KH}_j^{an}(\mathcal{X}) \rightarrow \cdots$$

が存在する. ここで $Y = X \otimes_R R/(\pi)$ は X の特殊ファイバー, $G_j(Y)$ は Y の高次 G 群である.

簡単に言うと $\text{KH}_j^{an}(\mathcal{X})$ は $G_j(Y)$ の差を除いて $K_j^{cont}(X)$ を記述する力を持つわけである. 特に変動的ホッジ予想において重要だった $K_0^{cont}(X)$ を理解するには $\text{KH}_0^{an}(\mathcal{X})$ を理解すればよいことになる. これにより変動的ホッジ予想の解決にリジッド解析幾何学の手法を応用することが期待される.

本研究では, この新理論を上述の「形式的スキームの代数的 K 群の代数化」に応用するために, 解析的 K 群にたいする p -進レギュレーター写像の構成にも成功した. これを説明する. 以下, R を上の通りとして, R が混標数 $(0, p)$ と仮定する. R 上固有的滑らかなスキーム X を固定し, X_K を X の生成ファイバーとする. さらに $\mathcal{X} = \hat{X}^{\text{rig}}$ を X の formal completion に付随するリジッド解析空間とする. 整数 $i \geq 0$ にたいし

$$KH_i^{an}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_p) = \pi_i(\text{holim}_n KH^{an}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$$

とおく. ここで $KH^{\text{an}}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ は $KH^{\text{an}}(\mathcal{X})$ の有限係数版で, $KH^{\text{an}}(\mathcal{X})$ と Moore スペクトラムとのウェッジ積として定義される. また整数 $i \geq 0$ にたいし

$$K_i(X_K, \mathbf{Q}_p) = \pi_i(\text{holim}_n K(X_K, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$$

が, $KH^{\text{an}}(\mathcal{X})$ を X_K の代数的 K 理論スペクトラム $K(X_K)$ に置き換えて同様に定義される. このとき定理 1 により, 形式的スキームの代数的 K 群の代数化の問題が, スペクトラの逆系の射 $K(X_K) \rightarrow KH^{\text{an}}(\mathcal{X})$ が誘導する代数化写像

$$\iota : K_i(X_K, \mathbf{Q}_p) \rightarrow KH_i^{\text{an}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_p) \quad (i \geq 0) \quad (1)$$

がいつ全射であるかという問題に言い換えられる. ここで次の可換図式に着目する.

$$\begin{array}{ccc} K_i(X_K, \mathbf{Q}_p) & \xrightarrow{ch_r^{\text{et}}} & H_{\text{et}}^{2r-i}(X_K, \mathbf{Q}_p(r)) \\ & \searrow^{ch_r^{\text{syn}}} & \uparrow \\ & & H_{\text{syn}}^{2r-i}(X_K, \mathbf{Q}_p(r)) \end{array} \quad (2)$$

ここで $H_{\text{et}}^{2r-i}(X_K, \mathbf{Q}_p(r))$ と $H_{\text{syn}}^{2r-i}(X_K, \mathbf{Q}_p(r))$ はそれぞれ X_K の p 進エタールコホモロジーとサントミックコホモロジーである. ch_r^{syn} は Nekovar-Niziol により構成されたサントミック・チェーン特性類写像で 2 番目の写像は Fontaine-Messing のサントミック周期写像で, これらの合成が Bloch によって構成されたエタール・チェーン特性類写像である. このとき次の定理を示した.

定理 2 : 自然な写像

$$ch_r^{\text{an}} : KH_i^{\text{an}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_p) \rightarrow H_{\text{syn}}^{2r-i}(X_K, \mathbf{Q}_p(r))$$

が存在して, 写像 ch_r^{syn} が

$$K_i(X_K, \mathbf{Q}_p) \rightarrow KH_i^{\text{an}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_p) \rightarrow H_{\text{syn}}^{2r-i}(X_K, \mathbf{Q}_p(r))$$

と経由する. ここで最初の写像は代数化写像 ι で, 2 番目は ch_r^{an} である.

ここで, $d = \dim(X_K)$ として ch_r^{syn} と ch_r^{an} から誘導される次の写像を考える.

$$\begin{aligned} ch^{\text{syn}} : K_i(X_K, \mathbf{Q}_p) &\rightarrow \bigoplus_{r \leq d+i} H_{\text{syn}}^{2r-i}(X_K, \mathbf{Q}_p(r)), \\ ch^{\text{an}} : KH_i^{\text{an}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_p) &\rightarrow \bigoplus_{r \leq d+i} H_{\text{syn}}^{2r-i}(X_K, \mathbf{Q}_p(r)). \end{aligned}$$

定理 3 : R の剰余体が有限かつ $p > i + d + 2$ を仮定する. さらに X の特殊ファイバー X_s にたいする Tate 予想, Beilinson 予想, Parsin 予想を仮定する. このとき ch^{an} は単射である. よって代数化写像 ι の余核は ch^{syn} の余核の部分群である.

上の定理により，これまで一般的なアプローチが全く知られていなかった形式的スキームの代数的 K 群の代数化の問題が，定理の仮定の下では，これまで活発に研究されてきた ch^{sym} の全射性の問題に帰着されたことになる．これにより，形式的スキームの代数的 K 群の代数化が成り立つ新たな例を構成することにも成功した．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件／うち国際共著 9件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 S. Saito, K. Sato	4. 巻 to appear
2. 論文標題 On p-adic vanishing cycles of log smooth families	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tunisian J. Math.	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 S. Saito	4. 巻 to appear
2. 論文標題 Purity of reciprocity sheaves	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Adv. in Math.	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107067	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 M. Kerz, S. Saito and G. Tamme	4. 巻 to appear
2. 論文標題 K-theory of non-archimedean rings I	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Documenta Math.	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 M. Kerz, S. Saito and G. Tamme	4. 巻 to appear
2. 論文標題 Towards a non-archimedean analytic analog of the Bass-Quillen conjecture	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Inst. Math. Jussieu	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1017/S147474801900001X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 S. Kelly and S. Saito	4. 巻 to appear
2. 論文標題 Smooth blowup square for motives with modulus	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bulletin of the Polish Academy of Sciences - Mathematics	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Binda and S. Saito	4. 巻 18
2. 論文標題 Relative cycles with moduli and regulator maps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Inst. Math. Jussieu.	6. 最初と最後の頁 1233--1293
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1017/S1474748017000391	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 U. Jannsen, S. Saito and Y. Zhao	4. 巻 154
2. 論文標題 Duality for relative logarithmic de Rham-Witt sheaves and wildly ramified class field theory over finite fields	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Compositio Math.	6. 最初と最後の頁 1306--1331
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Ruelling and S. Saito	4. 巻 370
2. 論文標題 Higher Chow groups with modulues and relative Milnor K-theory	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Trans. AMS.	6. 最初と最後の頁 987--1043
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 S. Kelly and S. Saito	4. 巻 13
2. 論文標題 Weight homology of motives	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Internatinal Math. Research Notices	6. 最初と最後の頁 3938-3984
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計11件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Shuji Saito
2. 発表標題 Theory of motives and ramification theory
3. 学会等名 Enriques Lecture, Seminar of Geometry and Algebra, University of Milano, Italy (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shuji Saito
2. 発表標題 Rigid analytic K-theory and p-adic Chern characters
3. 学会等名 Workshop on arithmetic geometry, Tokyo-Princeton at Komaba, Tokyo, Japan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shuji Saito
2. 発表標題 Theory of motives with modulus
3. 学会等名 Arithmetic and Algebraic Geometry 2019 on the occasion of Prof. Terasoma's 60-th birthday, University of Tokyo, Tokyo Japan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shuji Saito
2. 発表標題 Rigid analytic K-theory and p-adic Chern characters
3. 学会等名 A conference 'Geometry: Local and Global' on the occasion of Prof. V. Srinivas's 60-th birthday, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shuji Saito
2. 発表標題 Rigid analytic K-theory and p-adic Chern characters
3. 学会等名 The conference "Arithmetic Geometry : l-adic and p-adic aspects, Tokyo, Japan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shuji Saito
2. 発表標題 Rigid analytic K-theory
3. 学会等名 Motivic homotopy theory and refined enumerative geometry, University of Duisburg-Essen, Essen, Germany (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shuji Saito
2. 発表標題 Rigid analytic K-theory
3. 学会等名 Arithmetic and Analysis, Conference on the occasion of Christopher Deninger's 60th birthday University of Muenster, Muenster, Germany (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shuji Saito
2. 発表標題 Motivic interpretation of Artin conductors
3. 学会等名 Conference on Algebraic Geometry and Number Theory on the occasion of Jean-Louis Colliot-Thelene's 70th birthday, Villa Finaly, Firenze, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shuji Saito
2. 発表標題 Motives with modulus and cdh descent for reciprocity sheaves
3. 学会等名 Polish Academy of Sciences Conference Center, Bedlewo, Poland (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shuji Saito
2. 発表標題 Rigid analytic K-theory
3. 学会等名 K-theory in algebraic geometry and number theory, Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn Germany (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 shuji Saito
2. 発表標題 Purity of reciprocity sheaves and motive of modulus
3. 学会等名 Algebro-geometric and homotopical methods, Institute Mittag-Leffler, Stockholm, Sweden (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 V. Cossart, U. Jannsen, S. Saito	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Desingularization: Invariants and Strategy: Application to Dimension 2	5. 総ページ数 to appear
3. 書名 Lecture Notes in Mathematics, Springer	

〔産業財産権〕

〔その他〕

斎藤秀司ホームページ http://www.lcv.ne.jp/~smaki/ja/index.html

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----