

令和 2 年 6 月 30 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2017～2019

課題番号：17K18725

研究課題名（和文）トロピカル幾何学のPentagram写像と離散モーース理論への応用

研究課題名（英文）Pentagram map in tropical geometry and its application to discrete Morse theory

研究代表者

加藤 毅（Kato, Tsuyoshi）

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：20273427

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,800,000円

研究成果の概要（和文）：トロピカル幾何学の実力学系の大域解析的な立場に基づいて、2つのテーマについて研究を行った。一つ目は確率論的手法を導入することにより、これまで有限変数系しか扱えなかったものを無限変数系まで拡張することに成功した。その無限変数系を量子化したトロピカル幾何学の力学系は、スカラーの場合と対応して、量子ランダムウォークと量子セルオートマトンとして与えられる。ここでは量子ランダムウォークの構造群として現れるユニタリ作用素のホモトピー型を決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

力学系の粗視化によってその大域構造の枠組みを抽出することをテーマにしている。特にトロピカル幾何学によるスケール変換の手法は、力学系のある種のコンパクト化と言える。通常解析的手法では、その軌道が複雑すぎてコントロールできないような力学系に対して、その枠組みを抽出することで本質的な大域構造のみに着目してその解析を行う手法である。個別の事象に適用できるように、様々な一般化を行っている。

研究成果の概要（英文）：In this project, we have studied two topics which are both based on global analysis of real dynamical systems of tropical geometry. Firstly, we have generalized the dynamical systems to the one with infinite number of the variables, by introducing some probabilistic approach. Secondly we have studied some homotopy theoretic aspects of quantum random walks which is a quantized version of tropical correspondence with quantum cell automata. In particular we have determined the homotopy types of the structure unitary groups of the former.

研究分野：幾何学

キーワード：トロピカル幾何学 力学系 Pitman変換 Nahm変換 量子ランダムウォーク

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

力学系の粗視化によってその大域構造の枠組みを抽出することをテーマにしている。特にトロピカル幾何学によるスケール変換の手法は、 R^n 上の力学系のある種のコンパクト化と言って良い。それは軌道の無限遠集合を与えるものであり、リーマン幾何学で与えられるハウスドルフ収束の手法よりも、本質的に強い収束を与える。そのため定義方程式を記述する算術が無限遠では異なってしまう。この現象を利用することで、大域力学系の枠組みを抽出するような一般的な手法はすでに完成していた。

2. 研究の目的

本プロジェクトでは、それをより具体的な数学的对象に適用していくために、幾何学的・位相的な取り扱いを発展させることが目的である。トロピカル幾何学を用いた力学系の研究においては、箱玉系とその変種の研究が、無限可積分系の立場から活発に行われているものの、幾何学的・位相的な取り扱いに関する発展はこれまであまり与えられてこなかった。その主な理由として、箱玉系に現れる玉の数(状態数)が有限個しか扱えなかったため、適用できる幾何学現象に大きな制約がかかることにある。本プロジェクトではまずその問題点を突破することに主眼を置いた。状態数を無限個にしてダイナミクスを直接的に拡張しようとする、時系列発展が well-defined にならない初期状態があることがすぐにわかるので、それではうまくはいかない。

本プロジェクトでは、箱玉系とよばれる可積分系のある種の連続系に拡張し、その力学系について Pitman 変換を用いて記述をした。これにより、今までは状態数が有限の範囲しか扱えなかった対象が、無限個の状態をもった力学系を与えたことになる。さらにその逆超離散極限も条件付きではあるが導入することに成功した。これは今後の方向性として 2 つのものを与えた。一つ目はその変換にトロピカル幾何学を適用することで、大域力学系としての枠組みを抽出することである。またそれを利用して幾何学的な対象へ応用していくことである。二つ目は、量子化された力学系の研究であり、特にヒルベルト空間上のユニタリ作用素として量子力学系を与えることでその特性を調べることである。

3. 研究の方法

トロピカル幾何学に現れる箱玉系は、基本的には系の相空間が半無限ではあるものの、ダイナミクスの主体である玉の数は有限である。玉の数が無限個あるダイナミクスに拡張することは非常に自然な発想であるが、それにはある種の解析的な統制を行う必要がある。ここでは確率論的手法を導入することで両無限ランダム箱玉系の構成を行った。

4. 研究成果

D.Croydon, M.Sasada, S.Tsujimotoらと共同研究を行い、確率論的手法を用いることで、無限個存在する玉の配置空間に、ある種の密度に制限をつけることで、両無限ランダム箱玉系の構成を行った。そこで重要な役割を果たすのが、Pitman変換と呼ばれるもので、各座標上玉の数のグラフに対して、その反射を与えるような、幾何学的に構成されるダイナミクスである。このダイナミクスと箱玉系のそれとの関連は具体的に記述することができる。それを導入することで、両無限ランダム箱玉系の様々な性質を調べた。特にエルゴード性や、ランダム固定点の存在条件など基本的な問題に関する解析を行った。そこで展開された力学系の相空間は非常に安定したreasonableな部分集合を選択したが、一方でそれは極大サイズではない。

ある種の弱い位相的な条件のもとでは、力学系を定義することができる極大部分集合は局所的な条件で定まることがわかり、その局所条件を完全に書き下すことは今後のテーマとなっている。トロピカル逆変換を施すことで、区分線形写像が有理写像に移り、特に箱玉系ダイナミクスは離散KdV方程式と対応している。一方ここで展開された、ピットマン変換が定める力学系の逆トロピカル変換に対応するものは現在のところあまり研究されておらず、それは今後のテーマとなる。

幾何学的な応用として、ある種の変換をトロピカル化した際にどのような変換になる

か、という自然な問題、特に微分幾何学に現れるNahm変換と呼ばれる、多様体上のベクトル束の上の接続に対する変換を取り上げた。それにより一般の非可換群に対してNahm変換の一般化を与えた。特にトロピカル幾何学に関係するケースとして、 T^4 上のNahm変換を普遍被覆空間 R^4 上に持ち上げることで与えられる Z^4 作用付きのNahm変換に関しては、その具体的な計算まで実行することに成功した。今後はそれにトロピカル幾何学の手法を適用することが課題となる。

量子力学系に関しては、D.Kishimoto, M.Tsuyataら代数トポロジーの専門家と共同研究を行うことで、量子ランダムウォークに現れるユニタリ行列全体のホモトピー型を決定することに成功した。これまで扱ってきた力学系は、ある状態から次の状態への移行を決めるためには、その初期状態の近傍のみのデータで与えられる。この性質を作用素に対応させたものが量子ランダムウォークと呼ばれる。具体的にはユニタリ作用素を無限行列で表示した時に、0でない成分はたかだか対角線から一様に有界な領域に含まれるものである。スカラーの場合には、通常の有理演算と $(\max,+)$ 代数の対応を用いて、それぞれの力学系について幾何学的に比較大域解析を行うものがトロピカル幾何学であった。Grossら物理学者達はその量子版に相当するものとして、量子ランダムウォークと量子セルオートマトンを導入した[1]。この量子版トロピカル幾何学に関して、幾何学的な研究はこれまでほとんど行われてきていないと言って良い。そのためここではまず量子ランダムウォークを定めるユニタリ行列全体の位相的性質を調べることを行い、特にそのホモトピー型を決定した。この結果に関する論文を現在作成中である。今後は、そのようなユニタリ作用素を構造群にもつバンドル理論の構成を行うこと、また量子セルオートマトンでも対応する研究を行い、最終的にはトロピカル幾何学の手法を用いて両者の比較解析を行うことにある。

[1] Index Theory of One Dimensional Quantum Walks and Cellular Automata, D.Gross, V.Nesme, H.Vogts and R.Werner, Commun.Math. Phys., 310, 419-454 (2012).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 D.Croydon, T.Kato, M.Sasada and S.Tsujimoto	4. 巻 1
2. 論文標題 DYNAMICS OF THE BOX-BALL SYSTEM WITH RANDOM INITIAL CONDITIONS VIA PITMAN ' S TRANSFORMATION	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Memoir of AMS	6. 最初と最後の頁 1-89
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kato, H. Sasahira and H. Wang	4. 巻 1807.08239,
2. 論文標題 Higher Nahm transform in non commutative geometry	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 arXiv	6. 最初と最後の頁 1-26
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Kato	4. 巻 1
2. 論文標題 Induced map on K-theory foe certain \mathbb{Z} -equivariant maps between Hilbert spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of non commutative geometry	6. 最初と最後の頁 1-34
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Higher Nahm transform in non commutative geometry
3. 学会等名 2018 Spring operator algebra program at ECNU（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Higher Nahm transform in non commutative geometry
3. 学会等名 Workshop on Noncommutative Geometry and Representation Theory・四川大学(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 M. Sasada
2. 発表標題 Dynamics of the box-ball system with random initial conditions via Pitman's transformation
3. 学会等名 Symmetries and Integrability of Difference Equations(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Tsujimoto
2. 発表標題 Quantum Walks on Graphs and Spin Networks
3. 学会等名 The 12th AIMS International Conference , National Taiwan University, Taipei, Taiwan(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Tsujimoto
2. 発表標題 Dynamics of the box-ball system with random initial conditions
3. 学会等名 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Valencia, Spain(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	辻本 諭 (Tsujimoto Satoshi) (60287977)	京都大学・情報学研究科・准教授 (14301)	
研究 分担者	岸本 大祐 (Kishimoto Daisuke) (60402765)	京都大学・理学研究科・准教授 (14301)	