

令和 3 年 6 月 13 日現在

機関番号：32689

研究種目：挑戦的研究(萌芽)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K18728

研究課題名(和文) 双対量子群による基本群の量子化

研究課題名(英文) Quantization of the fundamental group by dual quantum group

研究代表者

村上 順 (Murakami, Jun)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：90157751

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,600,000円

研究成果の概要(和文)：3次元多様体の幾何構造の量子化を考える第一歩として、結び目補空間の基本群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現と呼ばれるものの量子化を試みた。組みひも型の量子群 $BSL(2, \mathbb{C})$ をはじめとする組みひも型のホップ代数に対して、結び目から表現空間と呼ぶものを構成し、この同型類が結び目不変量であることを示した。特に $BSL(2, \mathbb{C})$ の場合は、 $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の表現空間の量子化と考えられるものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

幾何学においては、量子化の考え方は、変形理論や非可換幾何学の構成の大きな動機となっている。これまで、幾何的な量子化は偶数次元でしか構成できないと考えられてきたが、本研究では3次元多様体の量子化を目指し、その第一歩として基本群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の量子化の構成に成功した。この理論をもとに、奇数次元の高次元多様体の量子化への道が開けるものと期待している。

研究成果の概要(英文)：As the first step of a quantization of the geometric structure of 3-manifolds, it is tried to quantize the $SL(2, \mathbb{C})$ representation of the fundamental group of a knot complement. For braided Hopf algebras, including the braided quantum group $BSL(2, \mathbb{C})$, a representation space is constructed from the knot. The isomorphism class of such representation spaces is proved to be a knot invariant. Especially, the representation space for $BSL(2, \mathbb{C})$ can be considered as the quantization of the representation space for $SL(2, \mathbb{C})$ representation.

研究分野：トポロジー

キーワード：結び目 量子不変量 量子群 双曲幾何 3次元多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) ジョーンズ多項式をはじめとする量子不変量と呼ばれる結び目や3次元多様体の不変量は、それ自身結び目や3次元多様体の分類に役立つばかりでなく、体積予想により、量子不変量のある種の漸近極限から、双曲体積などの幾何学的構造に関する情報も得られることがわかってきた。このことから、量子不変量に対応するものとして、結び目補空間などの3次元多様体の幾何学構造を量子化したものが構成できるのではないかと考えた。

(2) 実際に、2次元の曲面の場合には、量子タイヒミュラー理論が構成されており、これを結び目補空間に拡張する試みがいくつかなされていた。ただし、幾何学構造の量子化は通常ポアソン構造を用いるため、3次元での幾何構造の量子化はできないともいわれていたため、幾何構造そのものを量子化する前に、直接量子化しやすい対象として、結び目補空間の $SL(2, C)$ 表現の量子化を考えてみることにした。 $SL(2, C)$ 表現の量子化に対応するものとして、 $SL(2, C)$ の座標環の量子化というものが知られており、これが活用できるものと考えた。

2. 研究の目的

(1) 一番大きな目的は結び目補空間などの3次元多様体の幾何構造を量子化することであるが、これを直接遂行することは、3次元というのが奇数次元であるため、ポアソン構造が存在しないので大変困難であると考えられた。

(2) 結び目補空間などの3次元多様体の幾何構造の量子化が困難と思われたので、量子化の最初のステップとして、結び目補空間などの基本群の $SL(2, C)$ 表現の量子化の構成を目指した。

3. 研究の方法

(1) まず $SL(2, C)$ 表現の量子化に適した量子群を探す。量子群というと Drinfeld-神保 のリ一環の普遍包絡環を量子化したものがよく知られているが、これの双対にあたる $SL(2, C)$ の座標環の量子化も知られている。また、この座標環の量子化にトランスミューテーションという操作を加えることで、組みひも型の量子群と呼ばれるものが構成されている。これらのものから $SL(2, C)$ 表現の量子化に適した量子群を特定する。

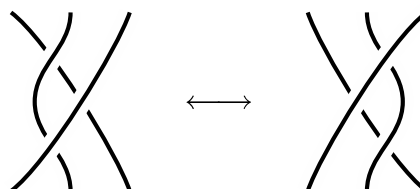
(2) 結び目補空間などの3次元多様体の基本群の $SL(2, C)$ 表現の量子化を得るため、通常の $SL(2, C)$ 表現の構成法を座標環の視点から見直し、基本群の生成元の間関係式を代数関係式に書き直し、これを量子化された $SL(2, C)$ の座標環で見直す。

(3) 以上の研究を進めるため、数理物理にも造詣の深いオランダの Roland van der Veen と共同研究を進める。

4. 研究成果

(1) まず、表現の量子化を構成するために、通常の $SL(2, C)$ 表現の構成法の見直しを行った。結び目補空間の基本群の表現を $SL(2, C)$ の座標環で捉えると、まずはカンドルという構造が浮かび上がってきたのであるが、さらに突き詰めると、座標環のもつホップ代数の構造が本質的であることがわかった。結び目補空間の基本群は、有限個の生成元とその間関係式で表示される有限表示群というもので、生成元に対して行列を対応させ、関係式から定まる行列成分の関係式により表現のなす空間が定まる。この関係式としてヴィルティンガー表示と呼ばれるものをとると、生成元の間関係式は、群の共役を取るという作用によって表示される。この共役を取るという作用は、行列環の座標環の持つホップ代数のアジョイント作用を用いて表示されるため、この行列環の座標環をホップ代数に置き換えることで、ホップ代数に対する表現空間というものを定義した。

ここで重要なのは、群の共役による作用を、ホップ代数のアジョイント作用に置き換えても、組みひも関係式という右の図のような関係式が成り立つことで

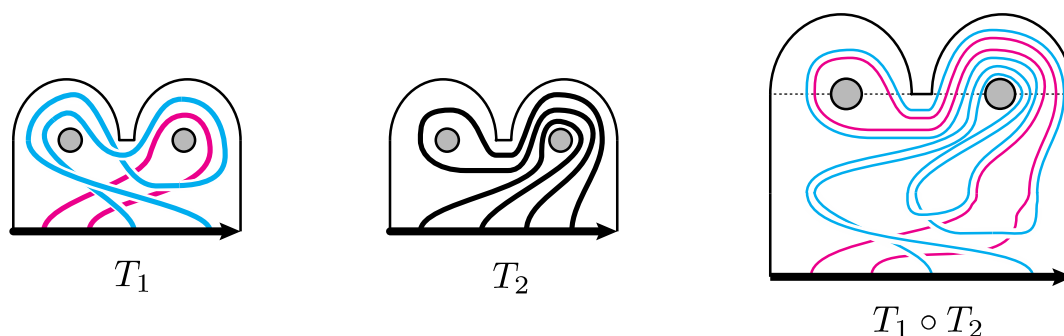


ある．このことより，組みひも群の表現が得られるのであるが，この構成法自体はホップ代数の専門家には広く知られていた．しかし，このホップ代数の表現から表現空間を構成するという手法は，従前には見られなかったものである．

(2) 結び目の基本群の表現を，ホップ代数による表現空間というものに置き換えた． H をホップ代数とし，結び目 K が n 本のひもからなる組みひも b の閉包とすると， H に対応する K の表現空間は， H を n 回テンソルした空間に，この組みひも b から定まる作用が定義できる．さらに，この作用と恒等作用の差の像が生成する両側イデアルを I とする．このとき， H を n 回テンソルした空間を I で割ったものが表現空間と呼んでいるもので，この表現空間の同型類が，結び目 K の不変量となることを示した．さらに，この構成が組みひも型のホップ代数にも適用できることを示し，組みひも型の量子群からも表現空間が定義できることがわかった．組みひも型のホップ代数には組みひも型の量子群も含まれており，この組みひも型の量子群は20年以上前からイギリスの Majid を中心として研究されてきたものである．この結果については既に Roland van der Veen との共著論文を学術雑誌に投稿中である．

通常の $SL(2, C)$ 表現では，表現空間をさらに共役類の空間でみた指標多様体というものが研究の中心となっている．しかし，組みひも型の量子群においては，この共役類の空間にあたるものが何なるのかがまだ理解されておらず，指標多様体の量子化までは行うことができなかった．しかし，ここでの成果は，組みひも型のホップ代数や，組みひも型の量子群が，結び目理論にも役立つ可能性があることを示しており，低次元トポロジーの研究ばかりでなく，ホップ代数や量子群の研究にもインパクトを与えている．

(3) さらに指標多様体の量子化を目指して研究を進めていく過程で，組みひも型のホップ代数による表現空間の構成が，京都大学数理解析研究所の葉廣和夫により創出されたボトムタングルの理論を用いて一般化できることがわかった．ボトムタングルとは，直方体に入力に対応する n 本のトンネルと出力に対応する m 個のハンドルがついたもので，このハンドルを別のボトムタングルのトンネルにはめることにより合成することができて圏を成している．さらに，葉廣はボトムタングルに組みひも型のホップ代数と類似の構造が入ることを見出ししており，組みひも型のホップ代数のかわりにボトムタングルから出発しても上記(2)と同様の結果を得ることができた．下の図では，2つのボトムタングルを合成する様子を示しており， $T_1 \circ T_2$ は T_1 の上の部分のハンドルが T_2 の黒い線で表されたトンネルに沿って埋め込むことで得られたものである．



結び目補空間の基本群は，自由群を関係式で割って定義された．自由群は穴あき円板の基本群であり，ボトムタングルは，この穴あき円板の基本群で，道の自己交差や交差交換を許さなくしたものとなっており，自由群の量子化と考えることができる．これに対して，穴あき円板の穴を組みひもにたいおうして入れ替えていくことで組みひもの作用が定義されており，表現空間は，基本群の生成元とその間の関係式による定義を量子化したものと考えられる．この実態はまだ十分に掴めていないが，近年活発に研究されているスケイン代数の理論とも相性が良く，量子トポロジーの新しい手法をもたらすことができた．

(4) 組みひも群のボトムタングルへの作用から表現空間が得られ，さらにこの理論をスケイン代数に適用することで，穴あき円板上のスケイン代数への，組みひも群の作用を記述する方法が得られた．スケイン代数の理論は，Bonahon-Wong や Thang T.Q. Le による研究で急速に発展しており，中でも穴あき円板のスケイン代数は，曲面に関するスケイン代数として最も基本的であり，その構造もよくわかっている．しかし，奇数次元の量子化は難しいと考えられていたため，もっぱら曲面、あるいは曲面に厚みをつけてできる3次元多様体に対してスケイン代数を利用した量子化の研究が進められており，穴あき曲面のスケイン代数から，組みひも群を経由することで結び目の研究に結びつけるという視点は，今までにはなかった新しい考え方である．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Jun Murakami	4. 巻 41
2. 論文標題 From colored Jones invariants to logarithmic invariants	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 453-475
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179244	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Alexander Kolpakov, Jun Murakami	4. 巻 27
2. 論文標題 Combinatorial decompositions, Kirillov-Reshetikhin invariants, and the volume conjecture for hyperbolic polyhedra	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Experimental Mathematics	6. 最初と最後の頁 193-207
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/10586458.2016.1242441	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Murakami Jun	4. 巻 8
2. 論文標題 Generalized Kashaev invariants for knots in three manifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 35 ~ 73
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/QT/86	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Cho Jinseok, Murakami Jun	4. 巻 26
2. 論文標題 Reidemeister transformations of the potential function and the solution	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 1750079 ~ 1750079
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216517500791	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Jun Murakami
2. 発表標題 Quantum algebra and low-dimensional topology I, II, III
3. 学会等名 Quiver Hecke algebra and its applications to topology
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 村上 順
2. 発表標題 結び目の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の量子化について
3. 学会等名 拡大 KOOK セミナー 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 村上 順
2. 発表標題 Quantized $SL(2)$ representations of knot groups
3. 学会等名 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jun Murakami
2. 発表標題 On quantum representation of knots via braided Hopf algebra
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Jun Murakami
2. 発表標題 On quantum representation of knots via braided Hopf algebra
3. 学会等名 Knot Online Semina
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Jun Murakami
2. 発表標題 On quantum representation of knots via braided Hopf algebra
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Jun Murakami
2. 発表標題 Quantized $SL(2)$ representations of knot groups
3. 学会等名 Expansions, Lie Algebras and Invariants (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jun Murakami
2. 発表標題 Volume conjecture for the logarithmic invariant
3. 学会等名 Volume Conjecture in Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jun Murakami
2. 発表標題 On a q -deformation of $PSL(2)$ representation of knot groups
3. 学会等名 Low dimensional topology and number theory X, 九州大学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jun Murakami
2. 発表標題 Presentation of knots by a braided Hopf algebra
3. 学会等名 Modular Forms and Quantum Knot Invariants, Banff International Research Station (カナダ)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jun Murakami
2. 発表標題 Braided Wirtinger presentation of knots
3. 学会等名 Representation Spaces, Teichmüller Theory, and their Relationship with 3-manifolds from the Classical and Quantum Viewpoints, Centre International de Rencontres Mathématiques (フランス、マルセイユ) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jun Murakami
2. 発表標題 On the volume conjecture of quantum knot invariants
3. 学会等名 Low-dimensional Topology and Number Theory, Oberwolfach Research Institute for Mathematics (ドイツ)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Jun Murakami
2. 発表標題 On the asymptotics of quantum 6j symbols
3. 学会等名 Invariants in low dimensional geometry & topology, トウルーズ大学(フランス)(招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Web Page of Jun MURAKAMI http://www.f.waseda.jp/murakami/jun-home-j.html

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	パリ第7大学			
スイス	チューリッヒ連邦工科大学	ヌーシャンテ大学		
アラブ首長国連邦	ニューヨーク大学アブダビ校			
アメリカ	テキサス州立大学ダラス校			
韓国	釜山教育大学			

共同研究相手国	相手方研究機関			
オランダ	フローニンゲン大学			