様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１６３０１
研究種目：挑戦的研究（萌芽）
研究期間：2017～2018
課題番号：１７Ｋ１８７３８

研究課題名（和文）悪条件な三角形分割を許容する有限要素スキームの探求

研究課題名（英文）Finite element schemes that permit non-shape-regular triangulations

研究代表者
土屋　卓也（Tsuchiya, Takuya）

愛媛大学・理工学研究科（理学系）・教授

研究者番号：００１６３８３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：数値シミュレーションは現代文明を支える重要な技術であり、有限要素法はその数値シミュレーションの主な手法の一つである。有限要素法を用いて数値シミュレーションを行う場合、まずやるべきことは問題領域（問題が定義されている領域）を要素と呼ばれる図形（三角形、四面体など）で充填することである。このことを、領域の三角形分割という。有限要素法により精度が良い計算結果を得るためには、三角形分割の幾何学的形状について何らかの条件を課す必要があることが知られている。
本研究により、三角形分割の幾何学的形状についてもっとも重要なのは、三角形分割内の三角形の外接円の半径の最大値が十分小さいことであることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義
有限要素法により数値シミュレーションを行う場合、もっとも大変なのは問題領域の三角形分割であると言われている。本研究により三角形分割の幾何学的形状のついての最も重要な条件が、分割内の三角形の外接半径の最大値であることがわかった。この条件は、今まで知られていた「正則性条件」や「最大角条件」よりも緩く、三角形分割にかかる計算量を軽減できることが期待できる。また、得られた条件はすぐに３次元の場合に拡張できることが期待できる。

研究成果の概要（英文）：Numerical simulation is one of the most important technologies for the modern civilization, and the finite element method is one of the most useful methods for numerical simulation. To apply finite element solution, we need decompose the problem domain (the region on which the problem is defined) into figures called finite elements. The decomposition of the problem domain is called triangulation. It has been well known that, to obtain accurate numerical solutions, we need to impose some geometric conditions on triangulations.
It has been cleared by our research that the most important factor is the maximum of the radius of triangles in the triangulation. We have shown that if the maximum of the circumradius converges to 0, then the error of finite element solution converges to 0.

研究分野：数値解析学

キーワード：有限要素法　関数補間　三角形分割

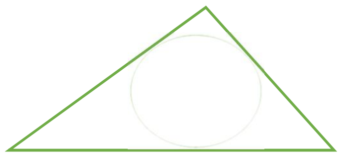
１．研究開始当初の背景

(1) **数値シミュレーションは現代文明を支える重要な技術であり、有限要素法** (finite element method) はその数値シミュレーションを実行するための主な手法の一つである。

有限要素法を用いて数値シミュレーションを行う場合、まずやるべきことは数値シミュレーションの問題領域を**要素** (element)と呼ばれる図形で充填することである。要素としては、2 次元問題の場合三角形が、3 次元問題の場合四面体が用いられる場合が多い。問題領域を要素に分割することを（その他の図形を要素として用いる場合も）**三角形分割** (triangulation)という。有限要素法を用いた数値シミュレーションで最も難しいのは、問題領域の三角形分割であるといわれている。

(2) 有限要素法の大きな特徴の一つは、関数解析を基本とする現代的な偏微分方程式論と相性がよく、有限要素法により得られた数値解（有限要素解と呼ばれる）の誤差を厳密に評価する理論が確立されていることである。有限要素解の誤差を数学的に厳密に評価するためには、三角形分割内の要素の幾何学的形状について、なんらかの条件を課す必要があることがわかっている。

一番よく用いられる幾何学的条件は、**正則性条件** (shape-regularity condition)と呼ばれるもので、これは要素の直径（三角形要素の場合は最長辺の長さ）と要素に内接する円、あるいは球の直径との比がある定数以下であるということである。正則性条件のもとでは、あまり平らな（“潰れた”）要素を使うことができないことになる。つまり正則性条件のもとでは、例えば問題領域に非常に細長い部分がある場合は、“良い”三角形分割が極めて難しいことになる。



“潰れていない”良い要素

“潰れた”悪い要素

２次元の三角形要素の場合は、もう一つ**最大角条件**(maximum angle condition) というものが知られている。これは、三角形の最大角がπ – D以下であるというものである。ただしDは、ある正定数である。例えば直角三角形は全ての内角が 90°以下なので、どんなに潰れていても最大角条件を満たす。

“潰れている”が悪くない要素

以上のように、三角形分割内の要素が正則性条件か最大角条件を満たせば、その三角形分割を用いた有限要素法により得られた数値解の精度が数学的に保証されることがわかっていた。これらの結果が得られたのは、1960 年代の終わりから 1970 年代にかけてであり、現在有限要素法の数学的基礎に関する全ての教科書において、以上のことが説明されている。

２．研究の目的

本研究では、有限要素解の誤差に関する理論（**誤差解析**と呼ばれる）を見直し、三角形分割に対する幾何学的制約を緩めることを目標にした。特に、三角形上の **Crouziex-Raviart 補間**（以下 CR 補間と書く）の誤差評価について考察することを目指した。以下、CR 補間について説明する。

三角形を考え、その上で定義されている連続な関数 f(x)を考える。この関数を補間する 1 次関数を定義するためにはいくつかの方法が考えられる。2 変数 1 次関数は 3 つの係数を持つので、3 つの独立の条件があれば、1 次関数が一意に決まる。最もよく使われるのは、三角形の 3 つの頂点での関数の値を用いる Lagrange 補間である。それに対して、CR 補間は 3 つの辺上での関数の積分値を用いる。つまり、CR 補間$I^{CR}f(x)$（1 次関数）は、元の関数f(x)の各辺上の積分値と一致するように定義する。CR 補間の考えかたを用いる Crouzeix—Raviart 有限要素法も同様に定義できる。

CR 補間、あるいは CR 有限要素法のこれまでの誤差解析は、用いる三角形分割の正則性条件のもとで行われてきた。本研究では、正則性条件をどこまで緩めることができるかを探った。

さらに、曲面の面積の定義という古くからの難問と、三角形上の関数補間を誤差評価との関連についても研究することを目標にした。

３．研究の方法

研究の方法としては、最大角条件を見出した Babuska-Aziz の論文の手法を我々の研究に適応した。Babuska-Aziz の手法とは、直角三角形を垂直につぶしても Lagrange 補間の補間精度は劣化しないことを示すテクニックである。Babuska-Aziz の論文では、三角形上の 1 次 Lagrange 補間の場合に証明しているが、我々の研究により Babuska-Aziz の方法はいろいろな

補間に適応できる汎用的なテクニックであり、CR 補間（と後に述べる RT 補間）にも使えることがわかった。

直角三角形を垂直に潰してもさまざまな補間の精度は劣化しない。

任意の三角形は、直角三角形の直角の角度を変更した三角形と相似である。直角の角度を変える変換は、２×２行列

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

による線形変換である。ただし、$s^2 + t^2 = 1$,かつ$t > 0$とする。我々は、さまざまな補間の誤差がこの行列の特異値により上から評価できること、さらにその特異値が三角形の外接半径を用いて表すことを示した。

直角三角形を変換すると任意の三角形と相似な三角形を得る

以上の結果は、三角形上の補間の誤差評価についてであるが、四面体上の補間の誤差についても同様な評価式が得られることがわかった。ただし、四面体については、外接球の半径を考えてもだめで、**射影外接半径**（projected circumradius）と呼ばれる量を考える必要があることがわかった。以下、四面体の射影外接半径について説明する。

四面体の任意の面Bを底面とし、その直径と外接半径をそれぞれh_B, R_Bとする。Bに垂直な平面を考えて、四面体をその平面に垂直に射影する。するとその像は三角形になるので、その像の外接半径を考えることができる。そのような外接半径の最大値をR_Pとする。射影外接半径R_Kは、

$$R_K = \min \frac{R_B R_P}{h_B}$$

で定義される量である。ただし、min は四面体の 4 つの面についてとる。

４．研究成果

(1) 得られた研究成果は以下の通りである。三角形 K 上の関数f の CR 補間$I^{CR} f$の誤差は、

$$|f - I^{CR} f|_{1,2,K} \leq C h_K |f|_{2,2,K}$$

と評価することができる。ただしh_Kは三角形Kの直径である。また、C は三角形の形状に依存しない正定数である。つまり、三角形がどんな形をしていてもサイズが小さくなっていけば CR 補間の誤差は 0 に収束する。

この結果をつかうと、CR 補間で曲面の面積を近似する場合、三角形分割に何の幾何学的条件を課さずに曲面の面積が近似できることがわかった。この結果は、有限要素法の従来の常識を覆すものであり、さらに研究を進める必要がある。また、この研究を契機として、曲面の面積の定義について更なる研究が進むであろう。

(2) この結果から、CR 有限要素法においても、三角形分割の形状によらない誤差評価が成り立つのではという期待が生まれた。CR 有限要素法は、いわゆる非適合 (non-confirming)であるので、Cea タイプの補題が使えず、誤差解析が難しい。この困難は、Raviart--Thomas 有限要素法（以下 RT 有限要素法と書く）と CR 有限要素法の関係式を使うと、克服できることがわかった。RT 有限要素法は適合(confirming)なので、Cea タイプの補題が成り立つ。よって、RT 補間の誤差評価が得られれば、RT 有限要素法の誤差評価を得られる。上述の Babuska-Aziz の手法は RT 補間の誤差評価にも有効で、その結果、外接半径を使った評価が成り立つことがわかった。結局、RT 有限要素法と CR 有限要素法共に、その誤差は三角形分割内の三角形の外接円の半径が 0 に収束していけば、誤差も 0 に収束することがわかった。この条件は、**外接半径条件**(circumradius condition)と呼ばれている。

(3) 四面体上の定義される Lagrange 補間の誤差を、正則性条件を仮定せずに射影外接半径を用いて評価することに成功した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計４件） 以下の論文は全て査読あり

[1] Kenta KOBAYASHI, Takuya TSUCHIYA, Error Analysis of Lagrange interpolation on tetrahedrons, Journal of Approximation Theory, to appear.

[2] Kenta KOBAYASHI, Takuya TSUCHIYA, Approximating surface areas by interpolations on triangulations, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 34 (2017) 509-530.
DOI: 10.1007/s13160-017-0253-0

[3] Kenta KOBAYASHI, Takuya TSUCHIYA, Error analysis of Crouzeix-Raviart and Raviart-Thomas finite element methods, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 35 (2018) 1191-1211. DOI: 10.1007/s10492-015-0108-4

[4] Aymeric GRODET, Takuya TSUCHIYA, Finite element approximations of minimal surfaces: algorithm and mesh refinement, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 35 (2018) 707-725. DOI: 10.1007/s13160-018-0303-2

〔学会発表〕（計１２件）

[1] 土屋卓也: 「Error estimation of Lagrange interpolation without the shape-regularity assumption」2019年3月2日 Numerical Verification (NIVEA) 2019 ウエスティン ルスツ リゾート（北海道虻田郡）

[2] Takuya TSUCHIYA: 「Hadamard variational formulae and its applications for iterative numerical schemes」2019年2月7日 ANZIAM conference 2019, Rutherford Hotel （Nelson, New Zealand）

[3] 土屋卓也: 「正則性条件を仮定しない Lagrange 補間の誤差評価について」2018年12月21日 環瀬戸内シンポジウム、 香川県立ミュージアム（香川県高松市）

[4] 土屋卓也: 「非正則三角形分割上の有限要素誤差解析について」2018年11月2日 ｉ岩手数理科学セミナー、岩手大学（岩手県盛岡市）

[5] 土屋卓也: 「Error analysis of Crouzeix-Raviart and Raviart-Thomas finite element methods」2018年6月26日 環瀬戸内ワークショップ、愛媛大学（愛媛県松山市）

[6] 土屋卓也: 「Error analysis of Crouzeix-Raviart and Raviart-Thomas finite element methods」2018年6月24日 SIAM East Asian Section Conference 2018 東京大学本郷キャンパス（東京都文京区）

[7] 土屋卓也: 「Crouzeix--Raviart 有限要素法と Raviart--Thomas 有限要素法の誤差解析」2018年6月8日 第23回計算工学講演会 ウインクあいち （愛知県名古屋市）

[8] Takuya TSUCHIYA: 「Error analysis of Lagrange interpolations on tetrahedrons」2018年3月28日 香港理工大学 (香港)

[9] Takuya TSUCHIYA: 「Error analysis of Raviart-Thomas and Crouzeix-Raviart finite element methods」2018年2月6日 ANZIAM Conference 2018、Hotel Grand Chancellor (Tasmania, Australia)

[10] Takuya TSUCHIYA:「Error analysis of Raviart-Thomas and Crouzeix-Raviart finite element methods」2018年1月7日, 環瀬戸内シンポジウム、島根大学松江キャンパス（島根県松江市）

[11] 土屋卓也:「"潰れた"要素を使って得られた有限要素解の誤差解析 -- 現状と展望」2017年9月8日 日本応用数理学会 2017 年度年会 武蔵野大学有明キャンパス（東京都江東区）

[12] 土屋卓也:「Error analysis of Crouzeix-Raviart and Raviart-Thomas finite element methods」2017年7月22日 環瀬戸内ワークショップ, 愛媛大学（愛媛県松山市）

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。