

令和 2 年 6 月 7 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2017～2019

課題番号：17K18740

研究課題名（和文）ホモロジー論的視点からのパーコレーションの高次元化の研究

研究課題名（英文）Percolation from the view point of homology theory

研究代表者

白井 朋之（Shirai, Tomoyuki）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：70302932

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,100,000円

研究成果の概要（和文）：パーコレーションの高次元化をホモロジー理論の立場から目指し、高次元の立方体複体において余次元1のホモロジー生成元に着目したパーコレーションの理論を構築し、その相転移について議論した。また、グラフ理論における全域木の概念に相当する全域非輪体は複体のホモロジー論および幾何学的考察に重要な役割を果たすが、立方体複体の設定で全域非輪体の個数についての表示式を与えた。またその過程で離散ホッジ小平方ラプラシアンの特値の計算を行い、立方体複体におけるパスに対する伊原型のゼータ関数の計算とその解析を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

液体の浸透現象や高分子の破壊現象など様々な応用分野の問題と関連しているパーコレーション（浸透）の理論は、これまでの研究では、1次元的な点と線の関係性から議論がなされてきた。本研究では立方体複体とよばれる高次元の対象について浸透現象の研究を行った。高次元に即した議論を行うために、1次元的な浸透の際にあらわれる木のような形（全域木）を、高次元的な形（全域非輪体）に置き換えて詳しく調べた。これらの考察は、今後新しい視点のパーコレーションの理論研究の足がかりを与え、1次元の理論と同様に具体的な応用が広がるものと期待している。

研究成果の概要（英文）：To develop percolation theory in higher dimension, hole percolation on cubical complex has been investigated by focusing on co-dimension one homology generators. In the setting of cubical complex, we counted the number of spanning acycles, which are the higher dimensional analogue of spanning trees in graph theory, and also we computed the spectrum of discrete Hodge-Kodaira Laplacian of the cubical complex and studied the Ihara-type zeta function for paths in cubical complexes.

研究分野：確率論

キーワード：パーコレーション ホモロジー論 全域非輪体 立方体複体 伊原ゼータ関数

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

パーコレーション理論は数学的には1960年代頃定式化されて以来多くの研究者が様々な視点から研究を行ってきた。特に連結成分の振る舞いが研究の中心で、これはホモロジー論的にはランダムな対象(グラフ)の0次ホモロジー群の研究をしていることに対応する。2000年前後からランダムなグラフだけではなく、ランダムな複体の研究も少しずつ始まっていた。一方で、応用の分野の要請にも答える形で位相的データ解析と呼ばれる分野が注目され始めて、特にパーシステントホモロジーは理論と応用の両面から盛んに研究され始めていた。研究代表者と分担者はそのような状況の中で、2015年頃よりランダムな対象にパーシステントホモロジーを応用する共同研究を始めた。その研究の過程で、ランダムな複体やいわゆる全域非輪体の研究にパーコレーション的な観点が必要であることを認識し始めて、本研究の視点へとつながってきた。

### 2. 研究の目的

確率論における従来のパーコレーション理論はランダムグラフの連結性の詳細な解析が中心的な研究課題である。例えば、格子の各辺を独立にランダムに発生させるランダムグラフに無限に大きい連結成分が存在するかというのは重要な研究課題で、その発生確率に従っていわゆる相転移という現象が知られている。また、1960年頃エルデシュとレンニによって研究されたエルデシュ・レンニグラフにも連結成分のサイズに関して相転移があることが知られ、現在でも盛んに研究されている。グラフの連結成分の個数はホモロジー論の言葉では0次ホモロジー群のランクに対応する。本研究ではこのホモロジー論的視点に着目して、ランダムな複体の高次ホモロジー群を手掛かりに、複体に対するパーコレーションの概念を新しく定義して高次元のパーコレーション理論の枠組みと基礎を構築するとともに、ランダム複体や全域非輪体の性質を調べる。また、高次元パーコレーションの研究によって得られる知見を、ランダム複体上のベッチ数など幾何学的諸量の極限定理等に應用することも目標の一つである。さらに確率論・トポロジーの融合的研究を通して、双方の分野における新たな研究の方向性の開拓と具体的問題の提供に寄与することを目標とする。

### 3. 研究の方法

本研究の実施には、理論的研究と数値実験的研究の双方を行った。理論的研究においては、研究課題に関する集中した議論が必要であるため、研究分担者、連携研究者との定期的なセミナーを開催し、詳しい議論を行うとともに、新しいアイデアの交換や新規論文の紹介等を行った。また、国内外の関連の研究集会・セミナー等に参加して、情報収集および参加者らとの情報交換を行った。また数値実験によって得られる知見を理論的研究に利用した。また研究期間内に得られた結果については、国内外の研究会で発表して参加者らからのフィードバックを得るとともに、論文として執筆して投稿した。

### 4. 研究成果

研究の初期の段階では、グラフの場合におけるパーコレーションの最新の研究状況の報告とともに、連結成分の個数に対する中心極限定理の議論を行った。これは0次元のホモロジー群(もしくは0次元ベッチ数)に関するものである。このことは高次元の複体におけるパーコレーションの拡張の可能性および高次元ホモロジー群による無限クラスターの定義についての議論に発展し、その可能性とともに問題点も考察した。研究代表者白井と研究分担者平岡は、以前から研究を進めていた方体複体上の全域非輪体の数え上げの問題を考察した。複体における全域非輪体は、グラフの場合にはいわゆる全域木に対応しており、全域木が理論と応用の両面から重要であるように複体の研究において中心的な概念の一つである。また、パーシステントホモロジーとの関連では、パーシステントホモロジー群の可視化に相当するパーシステント図にあらわれるホモロジー生成元の生存時間の総和との関係において重要である。本研究では、方体複体上で定義される離散ホッジ・小平ラプラシアン固有値について計算した。グラフの連結性と固有値の関連に着目して、パーコレーションの高次元化のスペクトル論的定義の問題を念頭に、自由境界条件の場合のラプラシアンの固有値と固有空間の構造について考察した。固有空間には、複体の次元に関連するある種の階層構造があることを観察して、方体複体のすべての次元の離散ホッジ・小平ラプラシアンの固有値の計算を実行した。パーコレーションの定義という観点では、このスペクトル論の観点だけからでは、現時点で満足のいく結果は得られていないが計算の過程で副産物も得た。グラフの全域木の個数とラプラシアンの固有値の関係を与える「行列・木定理」は様々な方向へ拡張されており、単体複体への拡張は例えば Duval-Klivans-Martin らによって得られている。この結果の方体複体の場合への拡張を行った。この際、Kalai が証明した完全複体(完全グラフの単体複体版)の数え上げでは、全域非輪体もつねじれ群の存在により、行列・木定理の拡張が一般には全域非輪体の数え上げにはならないという事実があった。方体複体の場合には、完全複体の全域非輪体の数え上げに現れるねじれ部分群が現れず、行列・木定理が全域非輪体の数え上げをうまく記述していることを示した。これらの結果を用いて、方体複体の

各辺の幅を無限大にする極限を考えると、得られた等式の極限を取ることにより、全域非輪体の数え上げに関するエントロピーの表式が得られて、いわゆるマーラー測度の一次結合の形で表されることがわかった。これは、2次元格子の設定で、木エントロピーがカタラン数で記述できるとして知られている結果の方体複体への拡張となっている。白井・平岡・落合は、この計算と類似の方法で、トーラス上、つまり周期境界条件をもつ方体複体上のラプラシアン固有値の計算および固有値を計算した。この場合は、フーリエ級数の方法を用いた計算が可能で、固有値の計算方法は少し簡明になる。その応用として、方体複体上のパスに関する伊原型のゼータ関数の計算も可能になった。また、トーラスの各辺の長さから決まる円分多項式の類似に相当する整係数多項式を導入して、その多項式に付随するガロア群の作用による軌道の数え上げを実行することにより、ゼータ関数の因数分解についても議論を行った。この結果は論文として執筆して、Advanced Studies in Pure Mathematics への掲載が決まった。また、平岡・見上によって、 $d$ 次元の方体複体において $(d-1)$ 次元の穴に着目した新しいパーコレーションの類似物が導入された。これはもともと高分子の破壊現象と関連しており、高分子に張力を加えたときできる亀裂が、高分子内の空隙の連結によって生成される様子を表現したものである。この空隙によるパーコレーションの設定で、相転移現象の存在が確認された。また、面の出現確率が臨界確率よりも大きい場合には、無限サイズの穴のクラスターの存在についても証明された。本研究は、余次元1の場合のパーコレーションであるが、余次元が2以上の高次元のパーコレーションの定義への一つの可能性を示唆しているものである。本研究結果は、The Abel Symposium Proceedings への掲載が決定した。高次元のパーコレーションをもっとも一般的な形で定義するという本来の目標については、研究の余地が残されているが、本研究の成果はその足がかりになると期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Y.Hiraoka, H.Ochiai and T.Shirai	4. 巻 84
2. 論文標題 Zeta functions of periodic cubical lattices and cyclomatic-like polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 93-121
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y.Hiraoka and T.Mikami	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Percolation on Homology Generators in Codimension One	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Abel Symposium Proceedings	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Limit theorems for determinantal point processes
3. 学会等名 International Conference on Mathematical Methods in Physics , Marrakesh, Morocco. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Limit theorems for persistence diagrams
3. 学会等名 Seminar on KTH Royal Institute of Technology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 白井朋之
2. 発表標題 パーシステントホモロジーの確率論的側面
3. 学会等名 名古屋大学多元数理科学研究科大談話会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Limit theorems for determinantal point processes
3. 学会等名 International Conference on Mathematical Methods in Physics , Marrakesh, Morocco.（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 白井朋之
2. 発表標題 ランダム複体とパーシステントホモロジー
3. 学会等名 研究集会「離散幾何解析とその周辺」（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Spanning acycle entropy for cubical complexes
3. 学会等名 Modern Developments in Algebraic Dynamics: Challenges and Opportunities（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Determinantal processes and spanning acycle entropy I, II
3. 学会等名 RIMS共同研究(グループ型)「エルゴード理論の最近の発展」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	平岡 裕章  (Hiraoka Yasuaki)  (10432709)	京都大学・高等研究院・教授   (14301)	
連携 研究者	落合 啓之  (Ochiai Hiroyuki)  (90214163)	九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授   (17102)	
連携 研究者	竹居 正登  (Takei Masato)  (60460789)	横浜国立大学・大学院工学研究院・准教授   (12701)	