様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　５ 月 ２６ 日現在

機関番号：　３２６１２
研究種目：　挑戦的研究（萌芽）
研究期間：　2017～2021
課題番号：　１７Ｋ１８７４１

研究課題名（和文）確率論的手法を用いた幾何学的関数論の新展開

研究課題名（英文）New development of geometric function theory by probabilistic methods

研究代表者
厚地　淳（Atsuji, Atsuhi）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・教授

研究者番号：００２２１０４４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：正則写像の値分布の研究における中心的手法であるネヴァンリンナ理論を確率論的方法を用いて一般化することにより、一般領域上の有理形関数に対するネヴァンリンナ理論、特に第2主定理を示した。この一般化の過程で、マルチンゲール理論に現れる破綻関数の概念を関数論の研究に導入した。これを用いて、劣調和関数や調和写像が適当な幾何学的条件下では定数写像しか存在しないというリュービル型定理を得た。さらに発展的な研究展開として、コンパクトリーマン面上のリーマン-ロッホの定理の類似を無限遠の小さい無限グラフ上で示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究は、ある種の古典的関数論とそれに関連する現代の新しい数学の研究分野において、確率過程と関連する確率論的手法が両者に通底する数学的概念として存在することを示している。このような観点から研究することは、今まで関数論の研究対象とされてきた多様体に限らず、特異性を持つ空間やグラフ・ネットワークなど、より広範な空間上の研究対象へ古典的関数論の手法と概念を拡大できる可能性を与えるものと思われる。

研究成果の概要（英文）：We intend to generalize Nevanlinna theory which is a main method in the study of value distribution theory of holomorphic maps by using probabilistic methods. We obtained a second main theorem of Nevanlinna theory for meromorphic functions on general domains in complex Euclidean spaces. In the generalization process, we introduce a notion of default functions into the study of function theory. As its applications we obtained new Liouville type theorems for subharmonic functions and harmonic maps. We also extended our generalization ideas to consider an analogy of Riemann-Roch theorem on infinite, locally finite, connected graphs.

研究分野：　確率過程論、幾何学的関数論

キーワード：　ネヴァンリンナ理論　有理形関数　値分布論　Liouville型定理　劣調和関数　ディリクレ形式　正則写像　拡散過程

１．研究開始当初の背景

正則写像の値分布論の中心的方法としてネヴァンリンナ理論が知られている。この理論は、歴史的には創始者 R. ネヴァンリンナをはじめとして過去の著名な数学者たち、アールフォース、チャーン、Wu, グリフィス, キング, シュトールといった研究者の研究対象になっており、現在でも、単なる有理形関数の値分布論というだけではなく、いろいろな文脈 (複素解析、複素幾何、複素力学系、数論、微分方程式論 etc) で活発に研究されている分野である。ネヴァンリンナ理論において関数の定義域を拡張するという試みは、上述の研究者たちにより古くからおこなわれてきたが、最近では進んでいなかった。
一方、研究代表者は、従来のネヴァンリンナ理論に確率論的手法を応用することにより、古典的な場合に始まり、複素ユークリッ ド空間の部分多様体や完備ケーラー多様体などの上の有理形関数の値分布論を研究してきた。近年、複素葉層構造を持つ空間に興味を持ち、その上の葉向有理形関数、葉向正則写像という新しい対象の値分布論を考察した。複素葉層構造は非常に複雑な構造を持ち､その上の関数を従来の関数論的方法で取り扱うのは難しいと考えられる｡代表者は、これに対して、従来の方法より単純化した方法を用いることで研究が進展する可能性に着目し、単純化の方法「放物型スキーム」という着想を得た。従来のネヴァンリンナ理論は関数の定義域上の増大する領域の列に沿って考えてきた。従来の方法を一般化することの困難は、ネヴァンリンナ理論で現れる種々の量が領域でパラメータ付けられていることによると思われる。これは、良い幾何学的構造の下でなければ解析に困難を生じさせる。これに対し、ブラウン運動など適切な確率過程の経路に沿って考える「放物型スキーム」は、従来の領域をパラメータとしていた方法から、パラメータを確率過程の時間とする方法へと転換するものである。この単純化された方法を用いることで、前述の困難を避けることができると考えている。 また、この単純化された方法は、ネヴァンリンナ理論の一般化と同時に、従来の方法では適用が難しい対象への幅広い応用可能性を持つと考えられる。
歴史的にみると一般に、確率論的・ 確率解析的に確立された手法は、考える空間の構造に応じてどのような場合にも対応できる可能性がある。すなわち、その空間が微分構造のようなものを持てば、どこでもブラウン運動のような確率過程を構成でき、我々の手法が適用できる可能性がある。例えば、複素葉層構造を持つ空間や、特異性を持つ空間、グラフやネットワークといった離散構造を持つ空間などの上で定義された有理形関数や正則写像、およびその類似の研究に応用できるのではないかと考えられる。さらには、関連する色々な数学分野への発展も内包している可能性がある。

２．研究の目的

本研究は、幾何学的関数論で知られているネヴァンリンナ理論をあらゆる空間上の有理形関数について成立する一般的性質ととらえ、確率論的手法を用いて一般化されたネヴァンリンナ理論を構築し、これを応用して種々の空間上で新しい関数論を展開することを目標とする。より詳しくは次のような研究内容を考える。我々が放物型スキームと呼ぶ熱方程式の理論と確率解析を活用した手法により、一般の完備ケーラー多様体上の有理形関数に対するネヴァンリンナ理論を古典的な場合を踏襲する形で一般化する。この一般化により得られた手法と結果を、劣調和関数や正則写像の存在・非存在問題(リュービル型定理) や正則写像の除外点の個数評価 (ピカール型定理) などの値分布論的性質の研究に応用する。さらに、有理形関数や正則写像の個々の特別な場合の個別的研究を離れ、確率論的一般化を通して、ジェネリックな関数・写像に対して一般に成立する性質を抽出するという新しい観点の関数論の展開を目指す。

３．研究の方法

（１） 一般ネヴァンリンナ理論の構築.

一般のケーラー多様体上の有理形関数に対するネヴァンリンナ理論を確率論的手法を用いて一般化する。従来のネヴァンリンナ理論では、全空間を覆うような領域の増大列を考え、その領域ごとの解析を通じて結果を得てきた。この方法は、複素ユークリッド空間や代数多様体など強い幾何学的構造を持つ場合では有効だが、関数の定義域を一般化しようとすると、各領域から決まるグリーン関数や調和測度の領域依存性の解析が必要になる。この解析の難しさが一般化の障害となる。すなわち、従来のネヴァンリンナ理論の一般化に対する障害は、パラメータとして領域の増大列を考えることより生じている。これに対して、我々の考える放物型スキームでは、領域の増大列を取ることをせず、初めから全空間上で考え、ブラウン運動をはじめとする確率過程の経路に沿って考える。そこで確率過程の各時間にネヴァンリンナ理論に現れる特性関数、近接関数、個数関数といった量の対応物を定義する。これらの量を用いてネヴァンリンナ理論を再構

成することにより、上述の障害を回避できると考えた。すなわち、我々の新しいネヴァンリンナ理論のパラメータは時間となる。明らかに領域をパラメータとするより扱いやすく、単純化された方法であるといえるだろう。一方、我々の方法では個々の領域上の関数の性質を見ることはできないが、我々の見ようとする関数・写像の値分布論的性質は大域的性質であり、その役割を十分に果たすと考えられる。

（２）新たな特性量の解析と一般ネヴァンリンナ理論の適用．

上述のネヴァンリンナ理論の一般化では破綻関数（デフォルト関数）と呼ばれるマルチンゲール理論に現れる量が重要な役割を果たす。これらの解析を通じて、単なるケーラー多様体だけではなく、複素葉層構造を持つ空間や擬正則写像で写りあう空間など関数論・値分布論としては今まであまり手の付けられてこなかった空間の上の有理形関数、正則写像、劣調和関数などの大域的性質の研究を展開する。これには、種々の空間の上に適切な拡散過程を構成する必要がある。このためにディリクレ形式の理論を用いて設定を一般化した。

（３） ジェネリックな有理形関数の一般的性質の抽出．

一般ネヴァンリンナ理論の考え方を発展させることにより、ジェネリックな有理形関数に対して一般的に成立する性質を抽出するという全く新しい観点の関数論を展開する。ここで言うジェネリックな有理形関数とは、一般的な空間上で定義される関数で、古典的な関数論的性質の類似（ジェネリックな性質＝通有的性質）を満たすものを言う。確率論的考え方をもとにしてこのような関数に成立するより一般的な法則を見出す。特に本研究では、離散構造を持つ空間上の関数に着目した。

研究期間における当初の 2 年間は、主に研究計画 1,2 を並行して行った。
本研究では上述の内容を代表者１名による研究として行ったが、いくつかの分野が関連しているため、関連分野の研究者との議論が欠かせない。特に、研究協力者と連携研究者は、本研究の中心分野である確率論と複素解析・値分布論の専門家であり、代表者と各研究課題について頻繁に議論を行った。

４．研究成果

（１） 一般ネヴァンリンナ理論の構築の研究として、一般領域におけるネヴァンリンナ理論を研究した。ケーラー多様体上でネヴァンリンナ理論の第 2 主定理を一般化させるためには、曲率の制限が必要であった。ここでは、断面曲率の非正性とリッチ曲率の適当な下からの有界性を仮定する。断面曲率やリッチ曲率などの微分幾何学的特性量は複素多様体の双正則写像による変換で不変となるとは限らず、複素構造から決まるはずの有理形関数の値分布の研究に用いられる特性量としては、部分的な結果をもたらすに止まることになる。このため、有理形関数の定義域を微分幾何学的には単純であるが、有理形関数の値分布論的性質に対しては非自明である複素ユークリッド空間内の領域とすることで、領域の特性量がどのようにネヴァンリンナ理論に現れ得るかを検討した。そもそも一般の領域上の有理形関数に対するネヴァンリンナ理論は知られていないと思われるので、これ自身が新しい結果となる。一般的な領域としては、John 領域のようなポテンシャル論的正則性を満たす領域を考える。より簡単な例としては、境界が局所的にリプシッツ連続な関数のグラフで与えられるリプシッツ領域があげられる。すなわち、境界の滑らかさは従来の研究よりも緩和されている。ユークリッド空間上のブラウン運動をこのような領域に制限したものを考えると、一般に保存的にはならないが、ブラウン運動の時間変更を用いることで、保存的な拡散過程を構成することができる。この確率過程は、局所的正則関数を正則マルチンゲールに写すという意味で正則拡散過程となっている。この拡散過程を基礎としてネヴァンリンナ理論の第１主定理、第２主定理について考察した。第１主定理はすでに代表者の研究によって一般的に成立することが知られている。第２主定理の古典的証明の鍵となるのは、対数微分の補題またはその類似である。本研究では、まず、ディリクレ過程（劣調和関数など適当な関数族に属する関数と拡散過程を合成して得られる確率過程）に対するバークホルダー型不等式を証明し、これを用いて対数微分の補題の基礎となるゴルドバーク型不等式を証明した。これを用いることにより、問題にしている領域上の有理形関数に対する第２主定理が得られる。第２主定理は、複素射影空間上の各点と関数の像の近さを測る近接関数の和を特性関数の定数倍と剰余項で評価する不等式である。今回の結果では、剰余項は有理形関数に依存する部分と、関数によらず定義域の領域のみから決まる部分に分かれる。前者は特性関数に比べて小さな増大度を持ち、無視可能な部分となる。領域のみによる部分には、領域の擬双曲計量より決まる量が現れる。「特性関数の定数倍」の定数は 2 となり、この定数「2」は値域が１次元複素射影空間であることから現れる。この不等式を用いて関数の除外点の個数を評価する除外指数公式なども得られる。さらに、定義域の領域がクザン II 領域の場合は、Vitter(1977) と藤本(1985)の方法を援用することで、n 次元複素射

影空間(n≥ 2)への線形非退化な正則写像についても一般の位置にある超平面との交わりに関する第2主定理を得た。

（2） ネヴァンリンナ理論を放物的スキームによって一般化するとき、ネヴァンリンナ理論の個数関数は、ある種の局所劣マルチンゲールの破綻関数(デフォルト関数)によって定義される。この破綻関数をより一般のディリクレ過程に対して定義し、劣調和関数、調和写像、正則写像などの関数論的性質の解明に応用する研究を行った。リーマン多様体上の劣調和関数に対してはすでに代表者の研究によって一部は考察されていたが、本研究ではそれをより一般な設定に拡張した。最も一般的な設定としては、状態空間は局所コンパクトな完備距離空間またはルジン空間でよい。このような空間の上で既約、強局所、正則ディリクレ形式を考え、これに対応する対称拡散過程を考える。この拡散過程に対応するディリクレ空間に局所的に属する正値関数に対して破綻関数を定義した。 この破綻関数が消滅する(零になる)種々の条件をまず考察した。特に、状態空間がリーマン多様体である場合に、対象となる関数がディリクレ形式の意味で劣調和になるときを考察し、関数の積分の増大度とリッチ曲率を合わせた条件を考えることにより、既知のものよりも詳細な L^1-リュービル型定理を得た。すなわち、関数の積分の増大度がリッチ曲率に応じてある制限以下となる劣調和関数は定数に限ることを証明した。これは、既知の P.Li による L^1-リュービル定理を含む。ディリクレ過程を定義する関数として調和写像や正則写像のエネルギー密度関数を取れば、我々の議論はこのような写像の値分布や、リュービル型定理に応用できる。エネルギー密度関数がボホナー型不等式を満たすことを利用すると、これらの関数の破綻関数の消滅は、劣調和性よりも強い不等式を導く。これを基礎として、定義域の放物性の条件と値域の双曲性の条件を曲率と体積の増大度によって与えることにより、これらの条件の下で非定数写像の存在を否定するリュービル型定理が得られる。これらの結果は、調和写像・正則写像の微分幾何学的先行研究である Pigola et. al.(2003,2008), Takegoshi(2006), Li-Yau(1990) らの結果の拡張になっている。本成果をまとめた論文はすでに Jour. Japan Math. Soc.(2021)に掲載されている。

（3） ジェネリックな有理形関数の一般的性質の抽出に関する研究として、グラフ上のリーマン-ロッホの定理に着目した。古典的なリーマン-ロッホの定理は、コンパクトリーマン面上の因子、それを零点・極に持つ有理形関数の空間の次元とリーマン面の位相幾何学的量との関係を述べる等式である。Baker-Norine(2007)はこの定理をグラフ上の「有理形関数」と「因子」と位相的量(グラフのオイラー数)の関係式として捉えなおし、リーマン-ロッホの定理の類似を有限グラフの場合に証明した。ここで、「有理形関数」は頂点上の整数値関数であり、「因子」は頂点の整数係数結合である。我々の立場から見ると、このリーマン-ロッホの等式は有理形関数のジェネリックな性質(通有的性質)の一つということができる。そこで、この等式がより一般の無限グラフにおいても成立するかどうかを検討した。上述の有限グラフ上のリーマン-ロッホの定理を無限グラフに単純に拡張すると発散の問題が起き、意味の無いものとなる。我々は因子の係数や関数の値をすべて有理数値とし、さらにグラフの各辺に有理数値の重みを与え、この重みに関して次数(degree)が有限となる因子を考えることでこの困難を回避した。古典的なリーマン-ロッホの定理の非コンパクトリーマン面への拡張に関しては、R.ネヴァンリンナ、楠らの仕事が知られている。R. ネヴァンリンナの仕事はこの分野の先駆的仕事と言えるが、リーマン面の無限遠が「小さい」というリーマン面の放物性に関する条件の下で考察している。我々もグラフの「無限遠」の小ささを確率論的に規定し、その仮定の下で考察した。確率論的には、リーマン面の放物性はリーマン面上のブラウン運動の再帰性によって特徴づけられることが知られている。無限グラフ上では、ブラウン運動の代わりに、グラフの各辺に与えられた重みに対応する対称なマルコフ連鎖を定義することができる。この重みに適当な条件を与え、対応するマルコフ連鎖が強い再帰性(正再帰性)を持つように仮定する。すると、このマルコフ連鎖の生成作用素である重み付きグラフラプラシアンがスペクトルギャップを持つことを証明することができる。これをもとに次のようなリーマン-ロッホの定理を連結、局所有限な無限グラフにおいて証明した。
G を上記条件を満たす無限グラフとする。これ埋め尽くす有限部分グラフの増大列 $G_n \uparrow G$ を取る。各 G_n に対してはリーマン-ロッホの定理は成立するが、増大列をうまくとることによって、n を無限大に飛ばしたときも、リーマン-ロッホの等式に現れる各項が収束し、非自明な等式が成立することを示した。本研究の一部は発表論文の項目に記載した論文集において公表した。また、全内容についての論文は投稿済みであるが査読中である。アーカイブ上でも掲載公表している。A. Atsuji and H. Kaneko: A Riemann-

Roch theorem on a weighted infinite graph. arXiv:2201.07710 [math.CO]. なお、本研究は、研究協力者 金子宏・東京理科大学教授との共同研究によるものである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Atsushi Atsuji, Hiroshi Kaneko	４．巻 －
２．論文標題 A Riemann-Roch Theorem on Infinite Graphs	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Advances in Non-Archimedean Analysis and Applications	６．最初と最後の頁 297-312
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-81976-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 ATSUJI Atsushi	４．巻 73
２．論文標題 Default functions and Liouville type theorems based on symmetric diffusions	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	６．最初と最後の頁 525-551
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/82398239	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　10件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 厚地 淳
２．発表標題 Variations on the second main theorem of Nevanlinna
３．学会等名 「等角写像論・値分布論」合同研究集会（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Atsushi Atsuji
２．発表標題 Leafwise Brownian motions and some function theoretic properties of laminations
３．学会等名 International Program on Regularity Structures and Stochastic Systems（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Atsushi Atsuji
２．発表標題 Default functions and value distribution of holomorphic maps
３．学会等名 Tokyo one-day workshop on stochastic analysis and geometry（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 厚地　淳
２．発表標題 破綻関数と劣調和関数の解析II
３．学会等名 マルコフ過程とその周辺
４．発表年 2019年

１．発表者名 Atsushi Atsuji
２．発表標題 Default functions and Liouville type theorems based on symmetric diffusions
３．学会等名 Global properties in potential theory of continuous and discrete spaces（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2017年

１．発表者名 厚地 淳
２．発表標題 竹田の不等式の応用
３．学会等名 ディリクレ形式と対称マルコフ過程（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 Atsushi Atsuji
２．発表標題 Value distribution of holomorphic maps on negatively curved manifolds and some hyperbolic manifolds
３．学会等名 Geometry and Probability（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 厚地淳
２．発表標題 Leafwise Brownian motion
３．学会等名 慶應確率論ワークショップ（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Hiroshi Kaneko
２．発表標題 A Riemann-Roch theorem on network
３．学会等名 Seventh International Conference on p-Adic Mathematical Physics and its Applications（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 金子宏
２．発表標題 超距離空間におけるチップファイアリングとリーマン・ロッホの定理
３．学会等名 2021年度多変数関数論冬セミナー（招待講演）
４．発表年 2021年

1．発表者名 厚地　淳
2．発表標題 古典的関数論の離散類似における確率論的側面 - リーマン・ロッホの定理とネヴァンリンナ理論 -
3．学会等名 関西大学 確率論研究会2（招待講演）
4．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	金子　宏 (Kaneko Hiroshi) (90194919)	東京理科大学・理学部第一部数学科・教授 (32660)	
連携研究者	田村　要造 (Tamura Yozo) (50171905)	慶應義塾大学・理工学部・教授 (32612)	
連携研究者	相原　義弘 (Aihara Yoshihiro) (60175718)	福島大学・人間発達文化学類・教授 (11601)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関