

令和元年6月9日現在

機関番号：32689

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2017～2018

課題番号：17K18792

研究課題名（和文）革新的な数値計算スキームで挑む多次元恒星進化計算

研究課題名（英文）Development of a Novel Numerical Scheme for Multi-dimensional Stellar Evolution Calculations

研究代表者

山田 章一（YAMADA, Shoichi）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：80251403

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 5,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題は高速回転する恒星の進化計算を行うために、1.革新的な数値計算手法であるW4法による恒星の構造・進化計算と2.そのW4法自体の改良と効率化の2つからなっている。1.に関しては、進化計算に向けて、高速で回転して大きく歪んでいる二次元の恒星の構造を、座標変換などを駆使することによってラグランジュ座標上で計算することに成功した。2.に関しては、W4法の数理的基礎づけとスキームの改良を行った。その結果、連立方程式から求まるヤコビ行列を適切な2つの行列に分解し、それぞれを三項間漸化式の一番目の式と二番目の式に用いることで局所的な収束性と大局的な収束性を両立することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題では、革新的な数値計算手法であるW4法を開発し、二次元ラグランジュ座標上で回転して歪んでいる恒星の構造を求めることに成功した。恒星の進化計算を行うにはラグランジュ座標が適しているが、これまでのほとんどの二次元の回転している恒星の構造の計算はオイラー座標上でなされており、ラグランジュ座標での計算が可能となった本課題の研究成果の学術上の意義は高い。また本研究課題で開発したW4法は、恒星の構造計算のみならず広く連立非線形問題に適用することが可能であり、天体物理だけでなく、工学などといった社会の様々な非線形問題にも応用可能であり、社会的な意義も非常に大きい。

研究成果の概要（英文）：Having in mind the application to multi-dimensional evolution calculations of rotating stars, we aimed at two things in this study: (i) the application to the numerical constructions of rotating stars of the W4 method, a brand new scheme we have devised; (ii) improvements of the W4 method itself. As for the first issue, we have succeeded in obtaining highly deformed configurations of rapidly rotating stars on Lagrangian coordinates, taking into account self-gravity. As for the second subject, we have put the scheme on the firmer mathematical foundation. Based on this, we have improved the method by decomposing appropriately the Jacobian matrix of coupled nonlinear equations into two matrices and employing them in the first two equations in the three-term recursion formula. This way, we have achieved both local and global convergences.

研究分野：宇宙物理学

キーワード：多次元 恒星進化計算 回転 数値計算 非線形連立方程式

## 1. 研究開始当初の背景

宇宙で最も一般的な天体である恒星は、その中心部で原子核反応を起こし、それによって生じたエネルギーにより自分自身の重力を支えることでその形状を保っている。この原子核反応が進むにつれ恒星の組成は変化し、それに伴い構造も少しずつ変化する。これが恒星進化である。回転していない球対称な恒星については、1960年代に Henyey によってその構造と進化を高速にかつ安定に計算する定式化と数値計算スキーム (Henyey 法) が発明され、恒星進化論は大きな成功を収めた。この定式化と計算スキームは非常に強力で、現在も恒星進化計算における中心的役割を担っており、宇宙物理学において最も有名な計算スキームの一つとなっている。

一方、恒星は一般に自転していることが古くから知られている。さらに最近の観測では、高速回転により形状が歪んでいるような恒星が見つかっている。こうした自転する星の構造と進化を議論するためには、従来の球対称 1 次元計算ではなく、少なくとも軸対称 2 次元以上の計算が必要である。しかし多次元の構造計算では、Henyey 法は使えない。また、回転星の進化を追うためには、角運動量や温度分布の変化を形状変化と統合的に考慮する必要があるため、方程式の適切な定式化と多次元の境界値問題を効率的に解くことができる数値計算スキームの両方が必要とされたが、従来の恒星進化計算の延長的発想から抜けだせずにいたため、長い間見るべき進展がなかった。しかし、回転星の進化計算は超新星爆発と中性子星・ブラックホールの形成といった恒星進化の最後を飾る高エネルギー天体現象の研究にとっても極めて重要である。大質量星の進化の最後に起こる超新星爆発の最新の理論によれば、超新星爆発直前の星の構造は自転も含め、超新星爆発のダイナミクスにとっても極めて重要であることが分かってきた。このような高速回転して歪んでいる恒星の超新星爆発に至る進化には、従来のような球対称 1 次元モデルに平均化した遠心力を近似的に加えただけの計算は全く適用できず、非球対称な平衡形状を用いた、本質的に多次元の恒星進化計算が必要である。それには Henyey 法を使うことはできないため、従来の恒星進化計算の延長ではない全く新しい定式化と、それによって得られる多次元境界値問題を安定かつ効率よく解く革新的な数値計算スキームが必要とされているが、いまだ誰も成し遂げられていなかった。

## 2. 研究の目的

そこで本課題では、従来とは全く異なる新しい定式化から出発し、独自に開発した多次元境界値問題を簡便かつ効率よく取り扱える革新的な数値計算スキーム、W4 法を用いることで、高速回転する恒星の多次元的な構造・進化計算を行い、この難題に挑戦し恒星進化分野にブレイクスルーをもたらすことを目標とする。

## 3. 研究の方法

上記研究目的からも明らかなように、本研究は大きく分けると、1.W4 法自体の改良と効率化と、2.W4 法による回転星の恒星の構造・進化計算の 2 つからなっている。

### 1.W4 法の改良と効率化

ニュートン法などの多くの既存の計算手法は二項間漸化式に基づいている。一方で W4 法は三項間漸化式に基づいており、ニュートン法の収束性を改善している。しかしそのスキームの数理的な面での体系化はまだ十分になされておらず、パラメータの値のとり方や方程式自体の書き方は個々の問題ごとに試行錯誤して決めているのが現状である。そこで、W4 法に適した方程式の定式化と差分化、前処理の仕方などを系統的に明らかにしていく。

### 2.W4 法による自転する恒星の構造・進化計算

自転する恒星の構造を求めるためには、ラグランジュ座標で方程式を書き下し、適切に差分化することで得られる非線形連立方程式を解く必要がある。この非線形連立方程式の数値解法として、広く一般に用いられているニュートン法ではなく W4 法を採用する。このシステムはニュートン法では全く収束しないことがこれまでの計算結果から分かっており、W4 法で収束性が改善されるかどうかを徹底的に調べる。解が収束する保証はないが、収束した場合はスキームのパラメータの最適化などを行いながら、解系列の計算を系統的に行っていく。

## 4. 研究成果

### 1.W4 法の改良と効率化

研究 1.W4 法の改良と効率化に関しては、大きな進展があった。まずは W4 法が持つ数学的な構造を調べた。ニュートン法などの計算手法の多くは、ヤコビ行列の逆行列を用いた二項間漸化式により初期推量から出発し解を反復的に求めている。一方で W4 法では、これを三項間漸化式

に拡張することによって強力な収束性を実現している。特に変数が一変数の時は、ベネディクソンの定理から、任意の初期条件からはじめた反復による軌跡は、いずれかの解に向かうことを数学的に示すことができた(Okawa et al. 2018)。

次に多変数の時、ニュートン法ではヤコビ行列の逆行列を用いることで解近傍では二次収束するが、一方で反復の途中でヤコビ行列が正則でなくなるような時は逆行列が発散してしまうので、反復が発散したり振動したりすることで解が求まらないことが知られていた。そこで W4 法を改良し、ヤコビ行列をそのまま用いるのではなく、ヤコ行列を適切に分解することでこの発散を避けることに成功した。具体的には、ヤコビ行列  $J$  を上三角行列  $U$  と下三角行列  $L$  に分解する ULW4 法や、下三角行列  $L$  とハウスホルダー行列  $H$  に分解する LHW4 法などの定式化やテスト計算を多数行った(Okawa et al. 2018)。これらの W4 法は解近傍では局所収束性を保持しつつ、ヤコビ行列が正則でなくなる点での発散も避けることができるため大域的な収束性も実現している。

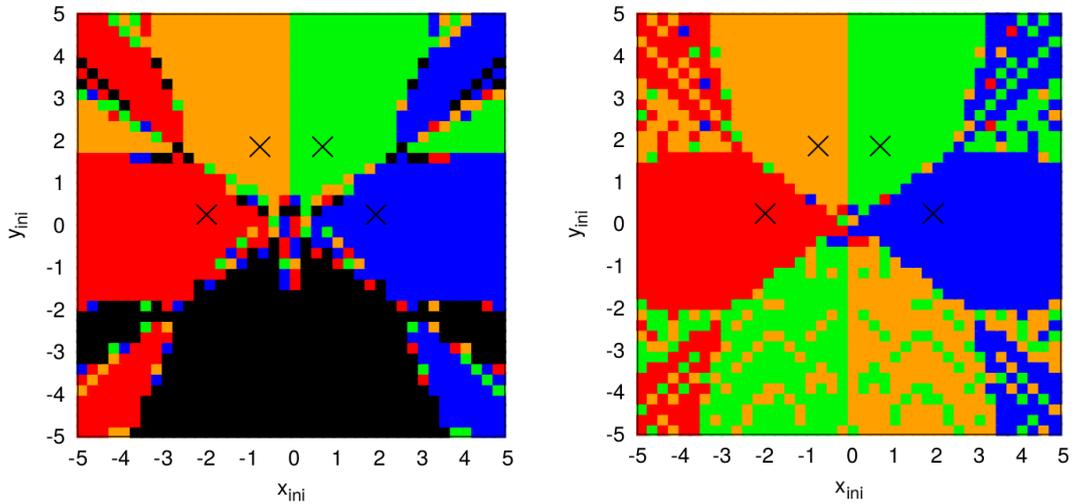


図 1: 4 つの解とその解に収束する領域の図。赤、橙、緑、青はそれぞれの解に収束する初期条件の領域を表している。黒はいずれの解にも収束しない領域を表している。それぞれニュートン法(左)、ULW4 法(右)で計算した

図 1 は  $x$  と  $y$  の 2 変数の非線形連立方程式をニュートン法、W4 で計算したあるテスト計算の結果の比較である(Okawa et al. 2018)。それぞれの色はその領域から出発すると解に収束する領域を表している。黒はどの解にも収束しない領域を表している。領域はだまかに  $x=y$  と  $x=-y$  の直線による 4 つの領域に分けられており、ヤコビ行列の逆行列はこの直線上で発散する。どちらの手法も、解の近傍の初期条件から計算を始めると解に収束しているため近傍収束性を持っているが、ニュートン法は解に到達しない黒い領域が存在している。ニュートン法はヤコビ行列の逆行列を用いているため、黒い領域から境界線を越えて解に収束するのは非常に困難であり、解に到達しない領域が存在している。一方の W4 法では、ヤコビ行列を  $U$  行列と  $L$  行列に分解しているためヤコビ行列の逆行列が発散するのを防ぐことができ、全ての初期条件からいずれかの解に収束している。

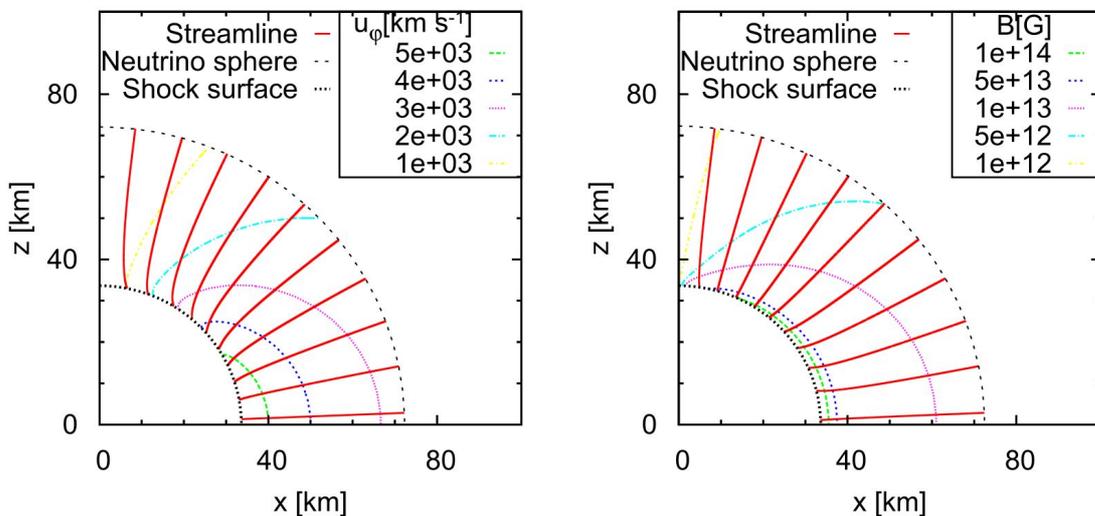


図 2: 定常降着流の解。内側の円は原始中性子星の表面、曲線は流線を表している。左: 回転し

ている降着流の定常解。点線は回転速度を表している。右：磁場を伴っている降着流の定常解。点線は磁場の強さを表している。

さらにはこのようなテスト計算のみならず、実際の天体物理学における応用問題として、超新星爆発の中心部で実現される停滞衝撃波の系にも W4 法を用いて取り組んだ。重力崩壊型超新星爆発は、大質量星がその進化の最終段階で中心部に鉄コアを形成し重力崩壊によって引き起こされる現象である。重力崩壊後、コア密度が原子核密度に達すると重力崩壊は反跳し外向きの衝撃波が形成されるが、この衝撃波はエネルギーを失いコア内部で停滞し、停滞した衝撃波と降着流の定常的な系が実現される。この停滞衝撃波が何らかのメカニズムで復活し、外向きに動き出し星の表面に達すると超新星爆発となる。ここで停滞衝撃波と降着流による定常的な系が実現されるため、定常解を求めることで停滞衝撃波復活の議論を行うことも可能である。そこで、W4 法を用いて、回転と磁場を伴った多次元の停滞衝撃波と定常降着流の解をより広い範囲で系統的に計算しその影響を調べた(図 2)。その結果、定常流や衝撃波に対する回転・磁場の影響は大きくないが、臨界光度は回転・磁場によって大きく減少することが明らかになった。実際に用いた定式化や W4 法の応用の詳細は論文として出版されている(Fujisawa et al. 2019)。

## 2. W4 法による回転する恒星の構造・進化計算

研究 2 では研究 1 で改良を行った W4 法を用いて、実際に高速回転する恒星の構造の計算を行った。まずは基礎方程式をラグランジュ座標で書き下し、差分して非線形連立方程式を書き下した。この方程式系はヤコビ行列の固有値の比が大きく固い方程式になっており、ニュートン法では解に収束させることができなかった。そのため、研究 1 で開発した ULW4 法や LHW4 法などを網羅的に試していくことで、解を収束させることをまずは目指した。その結果、LHW4 法がこの方程式系には適していることが分かり、LHW4 法を用いて回転する恒星の構造計算を行う数値計算コードの開発を行った。

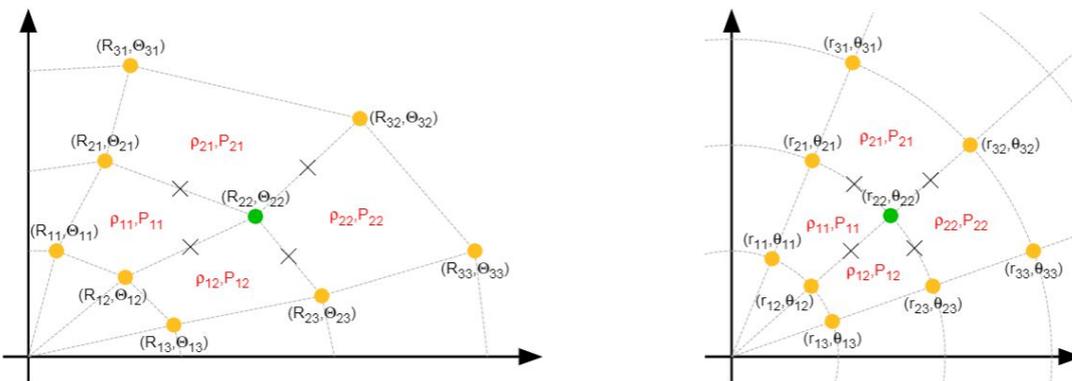


図 3: 回転により歪み非直交座標となったラグランジュ座標の図(左)とそれを直交座標に座標変換した図(右)。点は質量素片の位置、 $\rho$  は密度と圧力が定義されている場所、 $\times$  は運動方程式を評価している場所を表している。

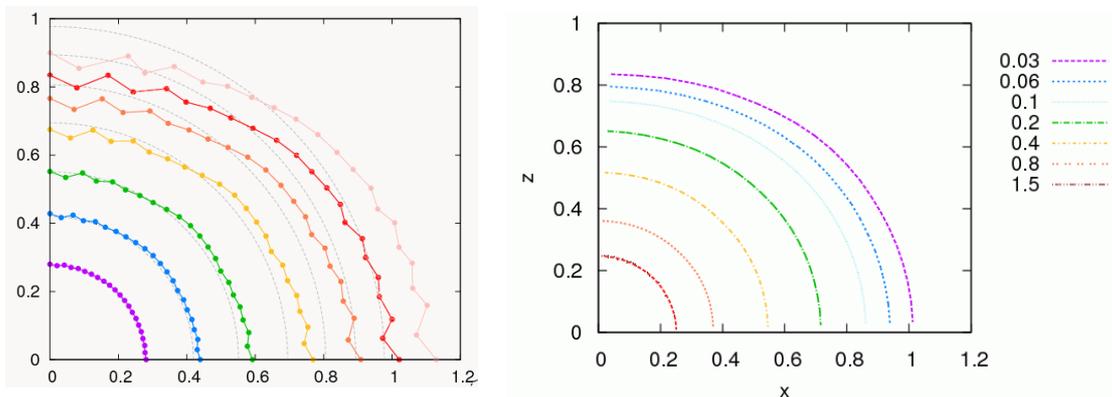


図 4: 多次元ラグランジュ座標での高速回転している恒星の構造の図。左: ラグランジュ座標における質量素片の図。点線は球対称の恒星の構造である。右: その時の密度の等高線の図。

一方で恒星が高速で回転している場合、その形状は遠心力によって大きく歪んでくるため、ラグランジュ座標も大きく歪んでしまい、計算が困難になることがあった。そこで回転によって歪み非直交座標となったラグランジュ座標を直交座標上に座標変換し(図 3)、座標変換先で方程式を計算することでこの問題に取り組んだ。図 4 は高速に差動回転している恒星の構

造を、座標変換を用いて計算した計算結果である。ラグランジュ的な定式化、W4法そして座標変換を用いることで、ラグランジュ座標上での高速で回転する恒星の構造を求めることに成功した。さらには状態方程式を少しずつ変化させたような解系列を多数求めることで、疑似的な進化計算を行うことにも成功した。今後はより現実的な状況の星の進化計算を行う用意拡張し、高速回転する多次元恒星進化計算を行うことを目指していく。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

1. K. Aoki, K. Maeda, Y. Misonoh, and H. Okawa,  
“Massive graviton geons”  
PHYSICAL REVIEW D, 2018, 97, 044005 (査読有)

2. Y. Nobutoshi, L. Tong-Gyu, M. Toshiki, T. Toshitaka,  
“Inhomogeneous Chiral and Coulomb Crystal in Neutron Stars”  
Proceedings of the International Astronomical Union, 2018, 337, 428-429 (査読有)

3. H. Okawa, K. Fujisawa, Y. Yamamoto, R. Hirai, N. Yasutake, H. Nagakura, S. Yamada  
“The W4 method: a new multi-dimensional root-finding scheme for nonlinear systems of equations” arXiv:1809.04495, 2018 (査読無)

4. K. Fujisawa, H. Okawa, Yamamoto Yu, S. Yamada  
“Effects of Rotation and Magnetic Field on the Revival of a Stalled Shock in Supernova Explosions”, 2019, The Astrophysical Journal, 872, 155-171 (査読有)

〔学会発表〕(計 10 件)

1. 安武伸俊, 大川博督, 藤澤幸太郎, 山田章一  
「質量座標系での二次元回転平衡形状の計算手法の構築へ向けて」, 2017,  
第 30 回 理論懇シンポジウム 「星の物理の新地平」

2. K. Fujisawa, H. Okawa, Y. Yamamoto, S. Yamada  
“Effects of rotation and magnetic field on the revival of a stalled shock in supernova explosions, 2018, Physics of Core-Collapse Supernovae and Compact Star Formations, Waseda University, Tokyo, Japan

3. 藤澤幸太郎, 大川博督, 山本佑, 山田章一  
「重力崩壊型超新星爆発における定常計算のための非線形連立方程式を数値的に計算する革新的な手法」, 2018, 日本天文学会秋季年会

4. 藤澤幸太郎, 大川博督, 山本佑, 平井遼介, 安武伸俊, 長倉洋樹, 山田章一  
「天体物理学における非線形連立方程式を数値的に計算する革新的な手法」, 2018, 日本天文学会秋季年会

5. 藤澤幸太郎, 大川博督, 山本佑, 山田章一  
「超新星の停滞衝撃波復活における回転と磁場の効果について」, 2018, 日本物理学会秋季年会

6. 安武伸俊  
“Pasta phases at the deconfinement phase transition”, 2018, Matter under Extreme Conditions in Heavy-Ion Collisions and Astrophysics (招待講演)

7. 安武伸俊  
“Quark-hadron pasta in neutron stars, 2019, Xiamen-CUSTIPEN Workshop (招待講演)

8. 安武伸俊, 小形美沙, 藤澤幸太郎, 大川博督, 山田章一  
「ニューラルネットワークによる回転星の構造計算」, 2019, 日本物理学会春季年会

9. 安武伸俊, 小形美沙, 藤澤幸太郎, 大川博督, 山田章一  
「星の平衡形状と中性子星の状態方程式」, 2019, 研究会 “宇宙の物質進化と元素合成”

10. 山田章一  
「大質量星の一生: その多次元的側面」, 2019, 研究会 “宇宙の物質進化と元素合成” (招待講演)

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://www.heap.phys.waseda.ac.jp>

## 6 . 研究組織

研究代表者  
山田 章一  
ローマ字氏名(YAMADA, shoichi)  
所属研究機関名：早稲田大学  
部局名・理工学術院  
職名：教授  
研究者番号：80251403

### (1)研究分担者

研究分担者氏名：安武 伸俊  
ローマ字氏名：(Yasutake, nobutoshi)  
所属研究機関名：千葉工業大学  
部局名：情報学部  
職名：准教授  
研究者番号(8桁)：10532393

研究分担者氏名：大川 博督  
ローマ字氏名：(Okawa,hirotada)  
所属研究機関名：早稲田大学  
部局名：理工学術院  
職名：次席研究員  
研究者番号(8桁)：40633285

研究分担者氏名：藤澤幸太郎  
ローマ字氏名：(Fujisawa, kotaro)  
所属研究機関名：早稲田大学  
部局名：理工学術院  
職名：日本学術振興特別研究員(PD)  
研究者番号(8桁)：30732408

### (2)研究協力者

研究協力者氏名：  
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。