

令和元年6月12日現在

機関番号：12608

研究種目：挑戦的研究(萌芽)

研究期間：2017～2018

課題番号：17K18838

研究課題名(和文) 圧縮性流体計算におけるGodunov型有限体積法開発のパラダイムシフト

研究課題名(英文) Paradigm shift of Godunov-type finite volume method for compressible flow

研究代表者

肖鋒(Xiao, Feng)

東京工業大学・工学院・教授

研究者番号：50280912

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、以下の研究成果が得られた。
セル境界不連続(変差)を最小化する原理、すなわちBVD原理に基づき、数値解の構造を保持できるBVD解法の設計指針を提案し、実証した。BVDアグロリズムとBVDの許容関数を考案し、実用性の高い高性能BVD解法を確立した。多段階BVDアグロリズムと常係数多項式及びTHINC関数を許容関数としたBVD解法の開発に成功し、既存手法に欠かせない非線形リミターを不要とする高解像度解法を実現した。提案したBVD法をオイラー方程式及び反応性圧縮性流れに適用し、接触不連続面、反応フロント、渦構造など従来手法が十分に解像できない流れ構造を高精度で解像できた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、BV値が数値散逸の大小に直結する点に着目し、これまでに類を見ないBV最小化の概念を数値解法開発の原理(BVD原理)として確立させた。BVD原理は、現行のGodunov型有限体積法の欠点を克服する斬新な発想であり、圧縮性流体のみならず、より一般的な双曲型保存則の数値解法の開発に大きな変革をもたらすことに違いない。本研究は、数値流体力学研究の新しい方向を示し、研究成果は関連分野の新しい理論体系の形成に展開していくであろう。さらに、本研究で提案、実証した新型の数値計算手法は、圧縮性流体の数値解析をはじめ様々な応用問題に大きく資するものであり、産業界にも大きな波及効果を期待出来る。

研究成果の概要(英文)：The major achievements in this project are summarized as follows.

(1)The guideline for designing new-type high-resolution Godunov schemes based on the BVD (Boundary Variation Diminishing) principle, which requires to minimize the difference in the reconstructed values across cell boundaries, has been established. (2) A class of schemes of great practical significance based on the BVD principle, so-called BVD schemes, have been proposed and verified. (3) High-fidelity shock-capturing schemes without any conventional nonlinear limiter have been developed using properly designed multi-stage BVD algorithms and BVD admissible reconstruction functions. (4) The BVD schemes have been implemented to Euler equations and reactive compressible flow simulations. The BVD schemes show significant advantage in resolving both smooth and discontinuous flow structures, especially in the cases where the contact discontinuities or moving fronts play a crucial role in the dynamic processes.

研究分野：数値流体力学

キーワード：数値流体力学 圧縮性流体 有限体積法 衝撃波 不連続面 流体工学 航空宇宙工学 計算物理

1. 研究開始当初の背景

高速飛行体周りの空気流れに代表される圧縮性流体现象には、衝撃波等の物理量の不連続構造と、乱流渦等の連続性を有する構造が共に存在する。これらの連続と不連続の解を同時に高精度で捉えることができる数値解法はまた確立されておらず、数値流体力学分野において関心の高い研究課題の一つである。衝撃波を精度良く計算する手法開発の歴史は古く、1950年代に提案された Godunov 法をもとに発展してきた高解像度有限体積法 (Godunov 型有限体積法) に代表される。これは現在、圧縮性流体力学の主たる数値解法として機械工学、航空宇宙工学、物理学等広い分野に使われている。しかし一連の Godunov

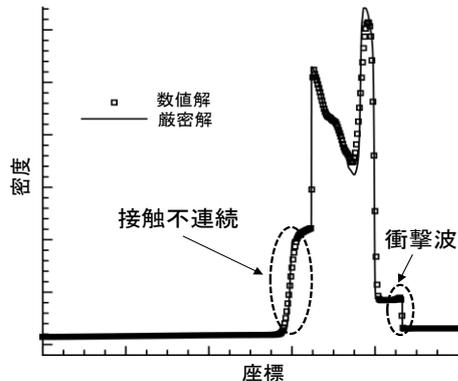


Fig.1 The numerical result WENO method for benchmark test.

型有限体積法の研究開発は次の既成観念に基づいている：①空間を分割するセル (格子セル) 同士の境界では、物理量の空間分布は常に不連続となる。②衝撃波など不連続解が存在する場合、物理量の数値振動を抑制する為に、リミターまたはフィルターを用いて空間分布を表す高次多項式の平滑化を行う。

その結果、図1に示すように、現行の主流解法は、衝撃波捕獲法として開発され、衝撃波を正しく捕らえられる一方、接触不連続面や渦構造などを計算する際に過剰な数値散逸が発生する。その為、これらの解法を用いる現状では、衝撃波と渦の干渉、空力音響、密度擾乱など、圧縮性流体の理論研究と実応用において極めて重要な事象に対して十分な計算精度を確保出来ない。

2. 研究の目的

本研究では、このような有限体積法開発の現状を打破するために、数値定式化の新たなパラダイムを確立し、それに基づく高性能な数値計算手法を提示する。具体的には、以下の研究目標を達成する：①現行の有限体積法のパラダイムを転換し、格子セル境界不連続性の最小化原理、すなわち Boundary Variation Diminishing (BVD)原理、を確立する。②これまでの多項式の平滑化に基づく方式から転換し、新しい BVD 原理に基づく空間再構築法を見出す。それにより、有限体積法の新しい枠組みを提案し、実用化に展開する。

BVD 原理は、格子セル境界の不連続を最小とすることで数値振動・散逸を極限まで抑制するという全く新しい概念であり、従来の Godunov 型有限体積法構築に関する既成概念を完全に覆すものである。これにより圧縮性流体の有限体積法開発の新しい枠組みを確立するとともに、新型数値解法の研究開発に新しい方向性を示す。

3. 研究の方法

3.1 BVD 原理の理論解析と数値検証

BV 最小化原理 (BVD 原理) を、リーマン・ソルバーをベースとした有限体積法の数値散逸を制御する為の一般原理として確立させる。BVD の許容関数類 (BVD-admissible functions) を同定し、空間再構築における一般的な原理としての BVD の普遍性を確かめる。BVD 原理の有用性、またそれに基づく数値解法の精度と BVD 許容関数類の関連性について検討する。

3.2 BVD 原理に基づく高解像度数値解法的设计指針の考案

BVD 原理に基づく数値解法的设计にあたり、様々な指針が存在する。また、BV と定性的に類似する概念として、Total Boundary Variation (TBV)、Effective Numerical Dissipation (END) 等の最小化を要求する原理も考えられる。これらを含む高解像度解法の多様な設計指針を検討し、高性能かつ実用性にも優れた低散逸解法的设计指針を検討する。

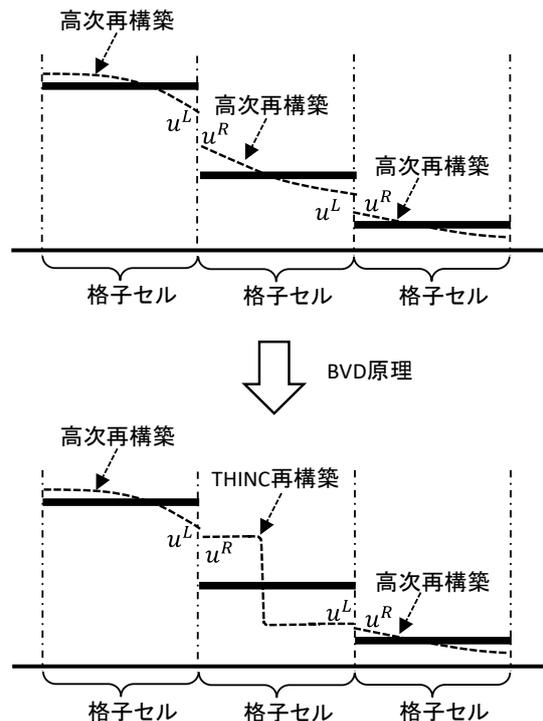


Fig.2 An example of spatial reconstruction based on BVD concept.

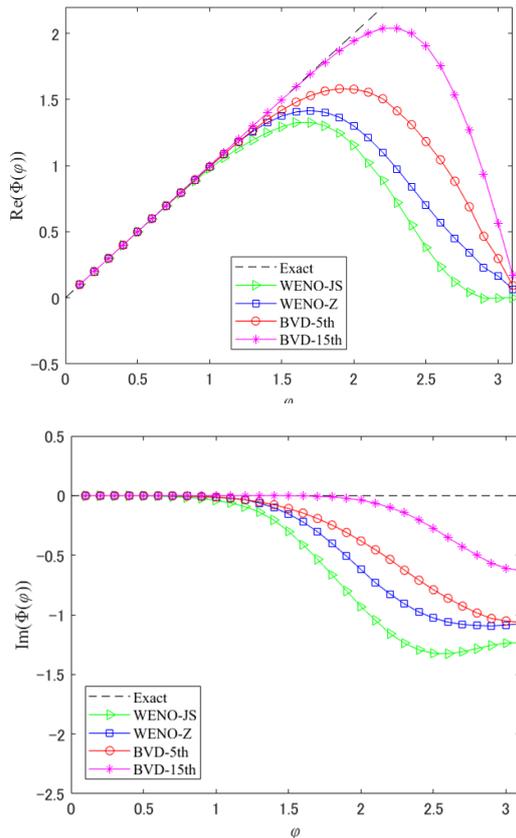


Fig.3 Numerical dispersion(top) and dissipation (bottom) of BVD method and WENO methods.

3.3 新原理・指針に基づく新しい有限体積高解像度解法の開発

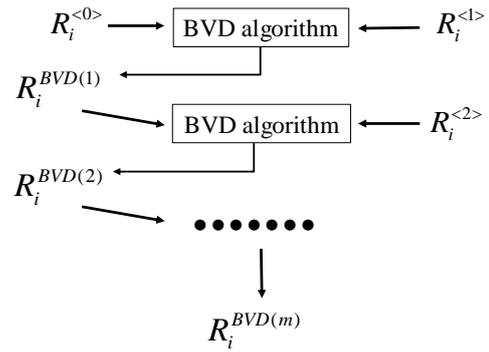


Fig.5 Multi-stage BVD algorithm.

上述の新しい原理・指針に基づく数値解法を提案する。図2に示すように、従来のGodunov型有限体積法(図2(上))の不連続が常にセル境界にあるという前提を取り除く(緩和する)為に、セル内部で不連続を表現出来るような再構築を用いる。例として、研究代表者らが先行研究にて提唱したTHINC(Tangent of Hyperbola Interface Capturing)法に用いる空間再構築関数を採用し、図2(下)のように、空間再構築によりセル内で不連続を表現することで、セル境界の不連続性(BV値)が緩和される。こういった不連続解に適した関数類をさらに調べ、従来手法で用いられる多項式との最適な組み合わせで、BV最小化原理に基づく高解像度数値解法を構築する。

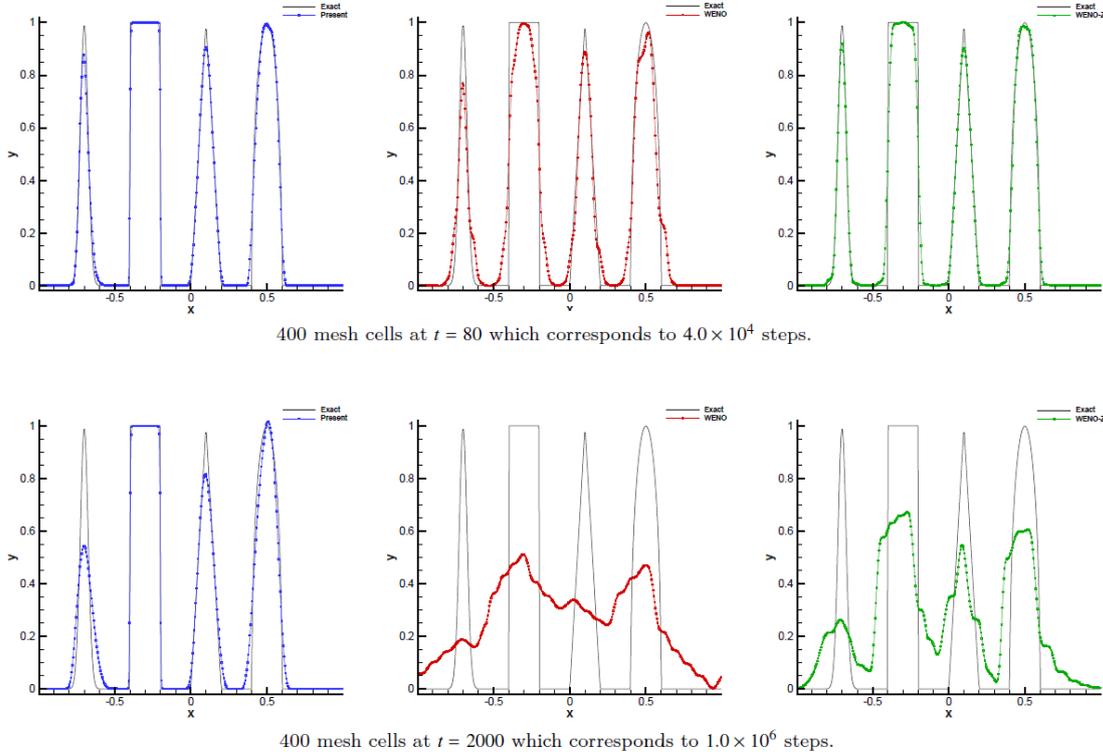


Fig.4 Advection benchmark test for complex profile. Results after 40,000 time steps (top) and 1,000,000 time steps are respectively computed by BVD method (left), WENO-JS (middle) and WENO-Z (right).

4. 研究成果

研究期間において以下主な研究成果が得られた。

4.1 BVD 原理有用性の理論解析及び実証

リーマン・ソルバーの構造を分析し、BVD 原理により構築した数値解法が散逸誤差を最小化することを明らかにするとともに、ADR (Approximate Dispersion Relation)法による BVD 解法と既存の有限体積法 (WENO 法) の数値分散・散逸特性を解析した。図 3 に示すように、同じ 5 次精度解法として BVD 解法は従来の WENO 法など高解像度解法に比べ、数値分散と数値散逸の両面において優れていることが分かる。

本研究によって提案された BVD 法は、従来の高解像度解法と異なり、数値振動と数値拡散両方の誤差を同時に抑える性能を有し、図 4 のように連続・不連続解が混在するベンチマーク問題においても高精度で計算できる。特に、長い計算 (百万ステップまで) 後の結果においても、正解に近い解の構造が保たれている。この結果は既往研究に類を見ないものである。

4.2 BVD 原理に基づく新型数値解法的设计指針の確立

多候補 BVD 許容関数を用いる場合、最終的な再構築関数を選定する BVD 判定アルゴリズムについて、計算精度保持と数値振動抑制の両面から考案し、いくつかの実用性の高い手法を提案し、検証した。一例として、複数の補間関数 $R_i^{<j>}(x), j=1,2,\dots,m$ から、段階的に計算精度、単調性、数値散逸抑制などの特性を満たすように TBV に基づく BVD アルゴリズムを確立した。図 5 に示すように、この多段階 BVD 法は従来型の非線形リミターは不要であり、線形係数の多項式関数と THINC 関数のみで高精度衝撃波捕獲スキームの構築に成功した。

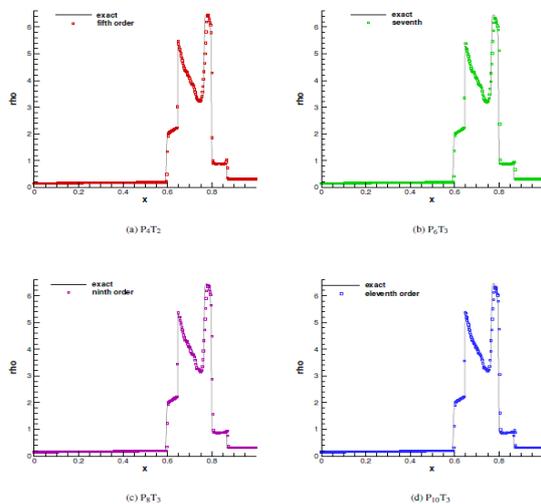


Fig.6 Two interactive blast waves computed by BVD schemes with 4th, (top-left), 6th (top-right), 8th (bottom-left) and 10th (bottom-right) linear (constant-coefficient) polynomials.

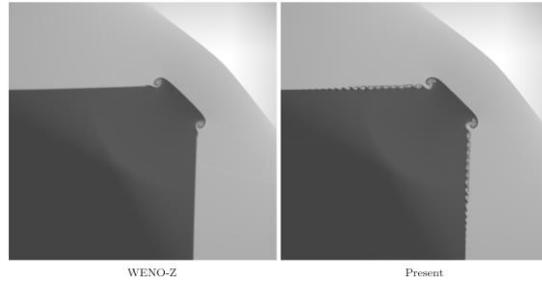


Fig.7 Two-dimensional Riemann problem computed by WENO (left) and BVD (right) schemes.

4.3 BVD 許容関数の同定

圧縮性や多層流などの複雑流れにおける連続・不連続解に対してそれぞれの構造を保持する最適な補間関数として、多項式系の補間関数と THINC 関数を中心に検討した。さらに、数値解法の堅牢性、計算効率、非構造格子への適性を考慮し、実用性の高い BVD 許容関数を見出した。

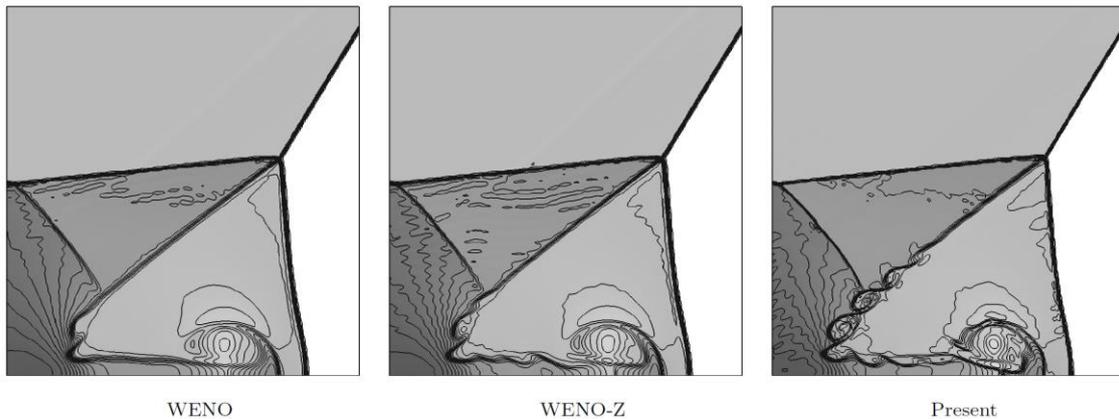


Fig.8 Double Mach benchmark test computation by WENO-JS(left), WENO-Z(middle) and BVD(right) schemes.

4.4 オイラー方程式への適用

BVD 数値解法をオイラー方程式に拡張した。前述のスカラー方程式に比べ、オイラー方程式のような複数の連立方程式で構成するシステムに適用する場合、異なる変数間の BVD 空間再構

築の関連性を調べ、保存変数、プリミティブ変数、特性変数における再構築の定式化を提示した。また、密度の再構築に BVD 法を適用することによって HLL リーマン・ソルバーの改良版 HLL-BVD を提案した。HLL-BVD は接触不連続面の計算に HLLC に遜色ない精度を持ち、HLLC などリーマン・ソルバーの強い衝撃波における不安定性（カーバクル現象）を完全に回避することができる。

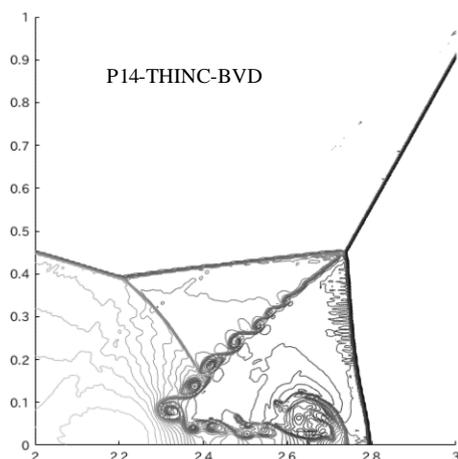


Fig.9 Double Mach reflection test computed by 15th-order BVD scheme.

には、15 次精度の BVD 法の計算結果を示す。

4.5 圧縮性反応流れへの拡張

BVD 法が連続・不連続解をともに高精度に計算できる特徴を生かして反応性圧縮流れの高精度数値モデルを構築した。図 10, 11 に圧縮性デトネーションガスのシミュレーション結果を示す。反応面において数値拡散を完全に防げたため、反応面の位置が正しく模擬されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

(1)P. Jin, B. Xie and F. Xiao(査読有): Multi-moment finite volume method for incompressible flows on unstructured moving grids and its application to fluid-rigid body interactions, *Computers & Structures*, 221, 91-110(2019).

(2)X. Deng , P. Boivin, F. Xiao(査読有): A new formulation for two-wave Riemann solver accurate at contact interfaces, *Phys. Fluids*, 31, 046102 (2019).

(3)X. Deng, Y. Shimizu, F. Xiao(査読有): A fifth-order shock capturing scheme with two-stage boundary variation diminishing algorithm, *J. Comput. Phys.*, 386, 323-349 (2019).

(4)X. Deng, B. Xie, H. Teng, F. Xiao(査読有): High resolution multi-moment finite volume method for supersonic combustion on unstructured grids, *Applied Mathematical Modelling*, 66, 404-423 (2019).

(5)J. Jin, X. Deng, Y. Abe, F. Xiao(査読有): Uncertainty quantification of shock-bubble interaction simulations, *Shock Waves* (2019).

(6)Y. Y. Niu, Y. C. Chen, T. Y. Yang, F. Xiao (査読有): Development of a less-dissipative hybrid AUSMD scheme for multi-component flow simulations, *Shock Waves* (2018).

(7)L. Qian, Y. Wei, F. Xiao(査読有): Coupled THINC and level set method: A conservative interface capturing scheme with high-order surface representations, *J. Comput. Phys.*,

高次線形係数の多項式関数と THINC 関数を BVD 許容関数とした BVD 法は、既存の WENO 法などの高解像度解法に伴う数値散逸誤算を大きく改善した。図 6 には、4, 6, 8, 10 次線形係数多項式を用いた BVD スキームによるベンチマークテストの結果を示す。数値振動を抑えつつ、接触不連続面を鮮明に捕られたことが分かる。

2 次元リーマン問題 (図 7) 及びダブルマッハ反射 (図 8, 図 9) など各種のベンチマークテストにおいて検証を行った。衝撃波とともに渦構造を精度よく再現でき、BVD 法は同じ格子解像度において WENO 法より優れた計算結果を示している。10 次以上の高次 WENO 法の構築は困難とされていることに対して、BVD 解法は非線形リミターを用いる必要がないため、より簡単にたてられる。図 9

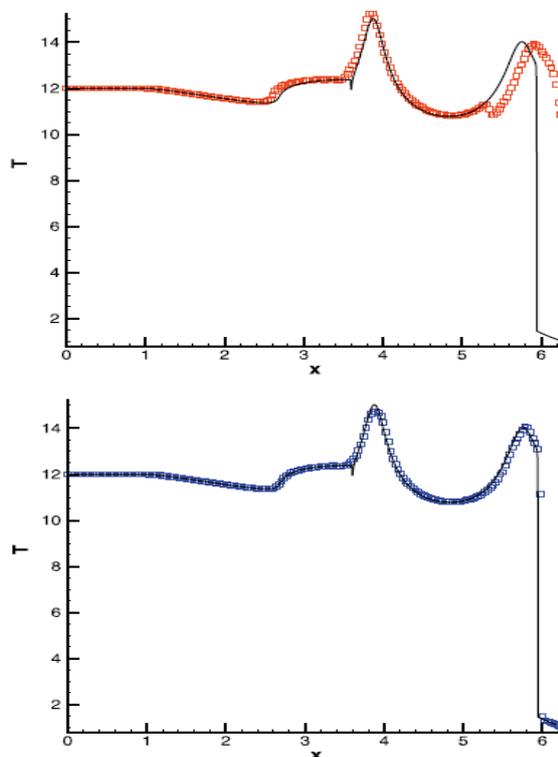


Fig.10 Detonation front computed by WENO (top) and BVD (bottom) schemes.

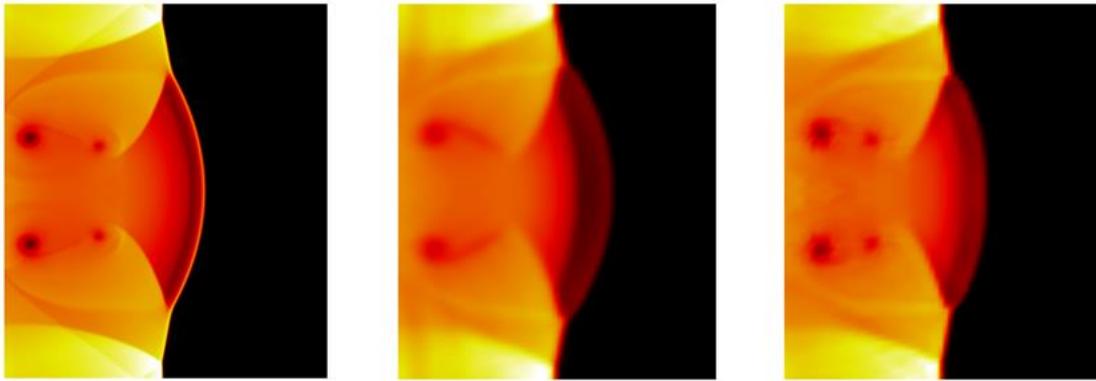


Fig.11 Two-dimensional detonation wave. Left: reference solution; Middle: WENO scheme; Right: BVD scheme.

373, 284-303(2018).

(8)P. Jin, X. Deng, F. Xiao(査読有): An ALE formulation for compressible flows based on multi-moment finite volume method, Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics 12, 791-809(2018).

(9)X. Deng, B. Xie, F. Xiao and H. Teng(査読有): New accurate and efficient method for stiff detonation capturing, AIAA Journal, 56, 4024-4038(2018).

(10)P. Jin, X. Deng and F. Xiao(査読有): A Direct ALE Multi-Moment Finite Volume Scheme for the Compressible Euler Equations, Commun. Comput. Phys., 24, 1300-1325 (2018).

(11)X. Deng, B. Xie, R. Loubère, Y. Shimizu and F. Xiao(査読有): Limiter-free discontinuity-capturing scheme for compressible gas dynamics with reactive fronts, Computers & Fluids, 171, 1-14 2018.

(12)X. Deng, S. Inaba, B. Xie, K.M. Shyue and F. Xiao(査読有): High fidelity discontinuity-resolving reconstruction for compressible multiphase flows with moving interfaces, J. Comput. Phys., 371, 945-966(2018).

[学会発表] (計 15 件, うち国際会議 9 件)

(1)S. Tann, X. Deng, Y. Shimizu, R. Loubere and F. Xiao: Solution property preserving method for Euler equations: a BVD/MOOD approach, SHARK-FV 2019 conference (Sharing Higher-order Advanced Know-how on Finite Volume) conferences May 20-24, 2019, Minho, Portugal

(2)F. Xiao (invited): A new paradigm to design high-fidelity Godunov schemes for both smooth and discontinuous solutions in complex flow simulations, International workshop on High Order Structure- Preserving Numerical Methods Algorithms, Analysis and Applications, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum (TSIMF), Jan.14-18, 2019, Sanya, China.

(3)S. Tann, X. Deng, R. Loubère and F. Xiao: High-Order Finite Volume Method for Hyperbolic Systems: MOOD and THINC Method, The 2nd International Conference on Mechanics (2018) / The 12th Asian Computational Fluid Dynamics Conference (2018), Oct. 15-18, 2018, Yilan, Taiwan.

(4)F. Xiao, X. Deng and Y. Shimizu: Boundary Variation Diminishing (BVD) Principle: A New Guideline to Design High-Fidelity Numerical Schemes for Complex Flow Simulations, Taiwan-Japan Workshop on Mechanical and Aerospace Engineering, Oct. 5-7, 2018, Hsinchu, Taiwan

(5)J. Jin, X. Deng, Y. Abe and F. Xiao: Effects of uncertainty in bubble density on flow structures in shock-bubble interaction, The 9th International Conference on Computational Methods (Iccm2018), Aug. 6-10, 2018, Rome, Italy

(他 10 件)

6. 研究組織

(1)研究分担者

なし

(2)研究協力者

なし