

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：特定領域研究

研究期間：2006～2009

課題番号：18079014

研究課題名（和文）複雑な系の量子統計推測と量子相関の研究

研究課題名（英文）Statistical inference and entanglement in complex quantum systems

研究代表者

松本 啓史 (MATSUMOTO KEIJI)

国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・准教授

研究者番号：60272390

研究成果の概要（和文）：量子統計推測とは、量子系に観測を行い、それにもとづいて統計的な推測を行うことである。その先端分野である、相関のある系の局所操作による統計的推測と、ブラックボックスの統計的推測について、とくに最適な観測はどんなものかを様々なケースにおいて明らかにし、ある程度の一般論を構築することができた。また、関連分野として、量子相関やブラックボックスの様々な性質をあきらかにし、また、量子統計推測理論の基礎も深めた。

研究成果の概要（英文）：Our topic is quantum statistical inference, which is statistical inference of quantum mechanical systems. We focused on statistical inference of correlated quantum systems and quantum channels, which are relatively new area. We successfully showed optimal measurements in variety of cases, and built some general theory. Also, we studied various properties of quantum correlation and quantum channels, and deepened the fundamental of quantum statistical inference.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	6,500,000	0	6,500,000
2007 年度	13,000,000	0	13,000,000
2008 年度	13,600,000	0	13,600,000
2009 年度	12,100,000	0	12,100,000
年度			
総計	45,200,000		45,200,000

研究分野：量子情報理論

科研費の分科・細目：情報学・感性情報学・ソフトコンピューティング

キーワード：量子統計推測 漸近理論 非局所性 通信路

## 1. 研究開始当初の背景

量子統計推測の一次漸近論の、単純かつ標準的な状況については、一般論が確率しつつあった。そこで、研究開始当初には量子相関のある系での統計的推測、ブラックボックス推定など、より発展的な話題に統計的背景をもつ

た研究者の関心が移行しつつあった。これらは量子計算、量子情報の様々な背景の研究者が研究していたが、誤差の最小化のような統計的に厳密な議論はまだあまり発達していなかった。量子相関の理論はかなりよいものがあるが、二体のものでも混合状態について

は未解決部分があり、多体については現在発達中であった。量子情報幾何もある一定の理論はあるものの、発展の余地が大きかった。

## 2. 研究の目的

量子情報理論と情報統計力学の接点を切り開く。量子情報の広い分野のうち、特に我々が知悉している量子統計推測の理論に焦点を絞る。古典的な統計学は情報統計力学と深い関係を有するので、その量子版でも同様のアプローチが可能である可能性が高い。特に、非量子での分野の状況を踏まえ、ブラックボックスの統計推測、量子相関がある系の統計推測を集中的に研究する。一方、方法論の充実の観点から、量子情報幾何および量子相関の研究をおこなう。双方とも、各々の課題自体が情報統計力学と関係を持ちうる。そして、理論を空論に終わらせないため、測定の実装についても研究をするが、これも複雑な測定に発展した場合、情報統計力学の対象たりうる

## 3. 研究の方法

量子情報幾何、量子相関の研究(担当:松本、林)は各々の分野で統計力学や情報理論を意識しながら、他の班との相互作用をえられるように留意する。その一方、量子情報幾何による量子相関の特徴づけ、量子相関の理論の成果の統計的推測の理論への応用をめざす。また、量子情報幾何の建設にあつては、統計的推測の理論の結果をにらみながら、意味のある幾何の発展に留意する。ブラックボックスや量子相関のある系の統計的推測は未熟な分野であるので、簡単な場合から始めて一般の場合を徐々に研究してゆくが、物理的実現や他の研究班との連携に留意しつつ進める。

## 4. 研究成果

### (1) ブラックボックスの推定問題:

(1-1) ユニタリ変換の推定の漸近理論: 従来の研究は、推定値と真の状態の間のフィデリティ(重なり具合)のみを評価していたが、われわれの研究は、平均二乗誤差、誤り確率、さらに検定までふくめて扱った。しかも、それらの結果は、フーリエ解析の手法を用いて系統的に導出されている。

また、一部で形式的にフィッシャー情報量を求める研究がおこなわれているが、誤差の減少の早さがデータ数の2乗分に反比例して減少するため、フィッシャー情報量では達成可能な誤差の下限を出すことができないことを、我々は繰り返し指摘し、誤差の平均値を直接計算する必要を強調した。この点、理論の進むべき方向を指し示したと考える。

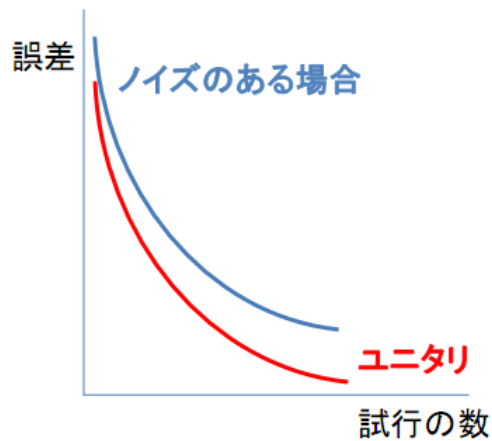


図1 誤差と試行の数の関係

(1-2) ユニタリではない場合: 先に述べたように、ユニタリ通信路においては、平均二乗誤差がサンプル数の2乗に反比例する(ハイゼンベルグ限界)が指摘されており、高精度測定への応用が議論されたこともあった。しかし、ノイズをふくむ通信路では、このような特異な精度の向上は起こらないことが個別例で指摘されていた。われわれは、一般に通信路の族が通信路空間の内点である限り、平均二乗誤差がサンプル数に反比例することを示した。つまり、わずかでも誤差があれば、ハイゼンベルグ限界は達成しないのである。

これらをふくめ、通信路の推定問題の大きな方向性を示しえたと考える。

(1-3) ブラックボックスの間の距離: 通信路の空間に定義される計量について、公理的な立場から研究した。直感的に必要と思われる要請、つまり他の通信路と組み合わせると距離が増大しない(単調性)そして少しの変化に対して距離も微小にしか変化しない(漸近連続性)から、古典通信路の場合ではあるが、計量が一意に定まること、そしてその計量が推定値の誤差の漸近的な下限に反比例することを示した。

(2) 量子の古典-量子通信路において、ユニバーサル通信路符号の構成に成功した。古典-量子通信路とは、古典情報を量子状態で送信する過程をモデル化したものである。ユニバーサル符号化とは、通信路が未知である場合に誤りを0に漸近させるための符号である。

量子論においては、観測の破壊的効果のため、ユニバーサル符号化の理論は古典の延長では成功しない。そこで、我々はかつて量子情報源符号化で用いた、群論的な対称性を利用した手法(群論的タイプ理論)をさらに発展させて田いた。



図2 ユニバーサル符号の概念図

### (3) エンタングル状態の統計的推測

(3-1) 確率1で識別できる状態の最大数(通信路容量に相当)を、3つ以上のサイトの間エンタングルメントをもった状態について調べた。その結果、その上限がエンタングルメントの指標の減少関数であらわせるこ

とがわかった。

(3-2) 純粋状態の推定理論と自己テレポーテーション:  
 純粋状態の多数のコピーが与えられたときの最適な推定方法を明らかにした。最適な推定量の構成には、自己テレポーテーションと名付けた新たなプロトコルを用いた。それは、遠隔地にテレポートするものである。これができれば、すべて可能な操作を尽くした場合と LOCC (局所量子操作と古典通信) に観測を制限した場合で、差がないことがただちにわかる。すなわち、自己テレポーテーションを用いて状態をある所に集め、最適な観測を施せばよいのである。そして、自己テレポーテーションは、系が純粋状態にあっても、エンタングルメントを持つ場合も常に可能である。エンタングルメントを持つ場合、自己テレポーテーションができて、LOCCのみで達成可能な推定精度はすべて観測を許した場合よりも真に劣ることすら明らかになった。また、同様の手法を用いて、局所コピーの漸近理論も完成させることができた。プロトコルの理論的背景は群論を用いたエンタングル状態の標準形である。

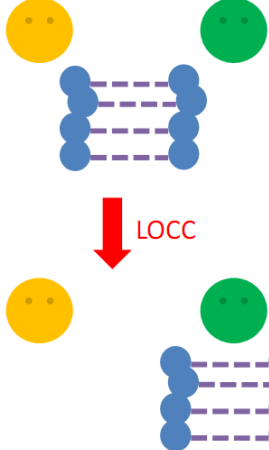


図3. 自己テレポーテーション

(3-3) 最大エンタングル状態の検定  
 量子状態で現在最も応用の多いのは、最大エンタングル状態とよばれる状態である。その効率的生成と配信は実験量子情報理論の大きなテーマである。そこでわれわれは実用的に実装できる観測の範囲内でより効率的な最大エンタングル状態の検定を考案した。

(4) 量子状態推定や検定の数学的基礎を充実させた。

(4-1) 一般的に漸近量子クラメールラオ下限は局所普遍推定量の最適化で表現されることは以前から指摘されており、部分的な証明もあつたが、無限次元の場合や適応的設定も含めて理論を完成させた。また、2次元量子状態の漸近理論を完成させた。その際、スピンの足し算の極限が漸近的にボソンの生成消滅演算子のようにふるまうことを示し(量子中心極限定理)、それによって問題をガウス状態の推定問題に帰着させた。  
 (4-2) 推定問題と深い関係のある問題に、クロニングがある。これは、与えられた系から、その複製を作る問題で、ある意味で予測問題の変形といえる。この問題も、漸近的にはガウス状態に帰着できることが予測される。そこで、われわれはまずガウス状態につ

いてこの問題をとくことに成功した。  
 (4-2) ネイマン-ピアソン型の仮説検定では、二つの仮説のどちらが正しいかを判定するのであるが、そのときにあり得る二通りの誤りのうち、片方の漸近的な減少率をある定数以上におさえ、残りの片方の誤りの減少率を最適化することがあり、その最適値を Hoeffding bound とよぶ。われわれは、その量子版を明らかにした。

(5) 非局所性とエンタングルメント

(5-1) その定量的指標である Entanglement of formation の加法性について、あらたな結果をえた。これは、この問題と同等の関係にある、通信路容量の加法性の問題として扱ったが、Conjugate Channel という概念を通じて、従来の議論を統一的に整理し、あらたな結果をえることができた。

(5-2) ベルの不等式とツァールソンの不等式:前者は古典的な相関がみたす不等式のおの総称である。ともに、量子的な非局所性を実験的に検証するために重要な式であり、また近年は暗号理論との関係からも重視されている。われわれはまず、4つ以上の系の相関に関するツァールソンの不等式を初めて得、さらに一般のn個の系についても得た。また、量子的に起こりうる相関の領域の計算可能性について考察した。そして、もしも二つの系の合成系を、観測可能量全体のなす代数に基づいて定義するならば、計算可能性がいえることを示した。

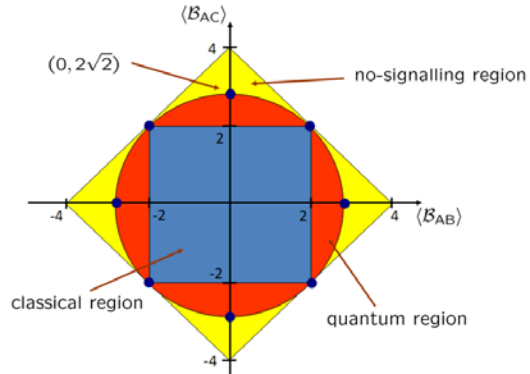


図4. ベルの不等式とツァールソンの示す、可能な相関の領域不等式の領域

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① K. Matsumoto, "On monotone metrics of the classical channel space: non-asymptotic theory," <http://arxiv4.library.cornell.edu/abs/1001.3543v2> (2010)
- ② K. Matsumoto, "On the first order asymptotic theory of quantum estimation," The Communication in Statistics, [http://arxiv4.library.cornell.edu/P\\_S\\_cache/arxiv/pdf/1005/1005.4759v1.pdf](http://arxiv4.library.cornell.edu/P_S_cache/arxiv/pdf/1005/1005.4759v1.pdf)

- ③ M. Hayashi, "Universal approximation of multi-copy states and universal quantum lossless data compression," Communications in Mathematical Physics. volume 293, Number 1, 171-183, (2010)
- ④ M. Hayashi, "Universal coding for classical-quantum channel," Communications in Mathematical Physics Volume 289, 1087-1098 (2009)
- ⑤ H. Imai and M. Hayashi, "Fourier Analytic Approach to Phase Estimation in Quantum Systems," New Journal of Physics Volume 11, 043034 (2009)
- ⑥ M. Hayashi, "Group theoretical study of LOCC-detection of maximally entangled state using hypothesis testing," New Journal of Physics volume 11, 043028 (2009)
- ⑦ M. Hayashi, D. Markham, M. Murao, M. Owari, and S. Virmani, "The geometric measure of entanglement for a symmetric pure state with positive amplitudes", Journal of Mathematical Physics volume 50, 122104 (2009)
- ⑧ M. Hayashi, K. Matsumoto, "Asymptotic performance of optimal state estimation in qubit system," Journal of Mathematical Physics, volume 49, 102101 (2008)
- ⑨ C. King, K. Matsumoto, M. Nathanson, M. B. Ruskai "Properties of Conjugate Channels with Applications to Additivity and Multiplicativity", Markov Process and Related Fields, volume 13, 391-423 (2007)
- ⑩ M. Guta and K. Matsumoto, "Optimal cloning of mixed Gaussian states," Physical Review A, volume 74, 032305 (2006)
- ⑪ M. Hayashi, B.-S. Shi, A. Tomita, K. Matsumoto, Y. Tsuda, and Y.-K. Jiang, "Hypothesis testing for an entangled state produced by spontaneous parametric down conversion," Physical Review A, volume 74, 062321 (2006)

[学会発表] (計 4 件)

- ① M. Hayashi, "Quantum Statistical State Estimation and Quantum Cramer-Rao Bound," International Conference on Frontiers of Interface between Statistics and Sciences, Hyderabad, India, December 30-January 2, 2010.
- ② M. Hayashi, "Quantum Universal Coding Protocols and Universal approximation of multi-copy states," International

Conference on Quantum Information and Technology, National Institute of Informatics, Tokyo, Japan, December 2 - 5, 2009.

- ③ T. Ito, H. Kobayashi, D. Preda, X. Sun, A. C. Yao: "Generalized Tsirelson Inequalities, Commuting-Operator Provers, and Multi-prover Interactive Proof Systems," The Eleventh Workshop on Quantum Information Processing, New Delhi, December 17-21, 2007
- ④ K. Matsumoto, "Self-teleportation and its application on LOCC estimation and other tasks," The Eleventh Workshop on Quantum Information Processing, New Delhi, December 17-21, 2007.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

松本 啓史 (MATSUMOTO KEIJI)  
国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・准教授  
研究者番号：60272390

### (2) 研究分担者

林 正人 (HAYASHI MASAHIITO)  
東北大学・大学院情報科学研究科・准教授  
研究者番号：40342836

根本 香絵 (NEMOTO KAE)  
国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・准教授  
研究者番号：80370104

### (3) 連携研究者

該当なし

### (4) 研究協力者

伊藤 剛志 (ITO TSUYOSHI)  
国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・特任研究員 (平成 19 年度)

今井 寛 (IMAI HIROSHI)  
国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・特任研究員 (平成 20 - 21 年度)