様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年３月３０日現在

研究種目：基盤研究（A）
研究期間：2006-2008
課題番号：18204003
研究課題名（和文）　GIT 安定性と標準ケーラー計量

研究課題名（英文）　GIT stability and canonical Kähler metrics

研究代表者
二木　昭人（FUTAKI AKITO）
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：９０１４３２４７

研究成果の概要：
ケーラー幾何の研究の一つの応用として，トーリック佐々木・アインシュタイン計量の存在問題に完全な解決を与えた．また，二木不変量と乗数イデアル層とどのような関係があるかを調べた． 更に，漸近的チャウ安定性の障害となる積分不変量は，トーリック Fano 多様体の場合,ヒルベルトシリーズの微分として得られることを示し,具体例に対する計算を実行した．その結果，これ等の張る空間は一般には２次元以上であることを示した．

交付額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００６年度 | 6,900,000 | 2,070,000 | 8,970,000 |
| ２００７年度 | 6,000,000 | 1,800,000 | 7,800,000 |
| ２００８年度 | 6,000,000 | 1,800,000 | 7,800,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 18,900,000 | 5,670,000 | 24,570,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分幾何

## １．研究開始当初の背景

幾何学的対象のモデュライ空間を記述する方法として，その対象を微分幾何的対象に置き換えて研究することはしばしば取られるアプローチである．リーマン面のモデュライ空間を定曲率計量や調和写像のモデュライ空間に置き換えて研究するのは，その典型的例である．もしこのようなアプローチが成功するならば，問題としている幾何学的対象のモデュライ空間はハウスドルフ性やいいコンパクト化をもつなどのいい性質をもつことが予想される．一方，マンフォードの幾何学的不変式論は群軌道に関し半安定なものの全体はハウスドルフ性やいいコンパクト化をもつなどのいい性質を持つということを主張している．そこで「微分幾何学的対象で記述できるモデュライ空間は幾何学的不変式論の意味の安定・半安定なもの全体と一致する」という仮設のもとに多くの研究がなされていた．上記の仮説が実証された典型的例は Kobayashi-Hitchin 対応である．これはケーラー多様体上の正則ベクトル束がエルミート・アインシュタイン計量を持つための必要十分条件は，Mumford-Takemoto の意味で半安定であるという主張である．ここで Mumford-Takemoto の意味でという理由は，他

にも幾何学的不変式論にのるような安定性の定義は色々あるが，エルミート・アインシュタイン計量を特徴づける安定性はMumford-Takemoto の意味の安定性であるということである．この主張は小林昭七，L?bke, Donaldson, Uhlenbeck-Yau により証明された．もう一つの典型的例として半安定パラボリック束とスカラー平坦ケーラー計量の関係もある．

２．研究の目的

本研究の主目的は端的ケーラー計量，特にケーラー・アインシュタイン計量，定スカラー曲率ケーラー計量を持つ複素多様体を幾何学的不変式論の意味の安定性でもって特徴づけることによりこの仮説を実証することである．幾何学的不変式論の議論に乗るような安定性の定義を与え，多様体がその意味での安定性を持つことがケーラー・アインシュタイン計量などの良い計量をもつための必要十分条件であることを示すことである．さて本研究課題の「標準ケーラー計量」の典型例はケーラー・アインシュタイン計量であり，これについては深く研究されている．最初のCalabi の研究は１９５０年代に始まる．問題はリッチ曲率の符号に従い，第一 Chern 類が正，0，負の３つの場合に別れ，0 と負の場合には Yau と Aubin により常にケーラー・アインシュタイン計量が存在することが証明された．したがって上記の仮説が正しければ第一 Chern 類が 0 または負ならば多様体は GIT に乗る何らかの意味で安定である筈であるがこれは Gieseker 等によりごく部分的であるが肯定的に検証されている（これをきちんと検証するのも本研究の目標である）．残る第一 Chern 類が正の場合が最も困難な場合で，ケーラー・アインシュタイン計量が存在するためのいくつかの必要条件といくつかの十分条件が知られている．近年，G. Tian, S.K. Donaldson, 満渕俊樹らの研究によりこれらの必要条件，十分条件が安定性とどう関わるかが次第に明らかになりつつあるが，全体像の解明にはまだ至っていない．ケーラー・アインシュタイン計量の存在はモンジュ・アンペール方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式に帰着される．問題の難しさを比較するために複素１次元の場合，すなわち１次元複素射影空間の場合に正則ベクトル束のエルミート・アインシュタイン計量を求める問題の方程式と比較すると，エルミート・アインシュタイン計量の場合は調和積分論から直ちに解の存在がわかるのに対し，ケーラー・アインシュタイン計量の場合はNirenberg の問題とよばれる次の有名な難問と同じ非線型偏微分方程式に帰着されることがわかる．「２次元球面上の任意のリーマン計量は定曲率計量に共形的であることを，一意化定理を用いずに，偏微分方程式を解くことのみで証明せよ.」すなわち，我々のケーラー・アインシュタイン計量の場合は正則ベクトル束のエルミート・アインシュタイン計量の場合よりはるかに非線形度が高いのである．ひとつのキー・ポイントは Moser－Trudinger の不等式である．Tian は高次元化した幾何的 Moser－Trudinger 不等式を導入してひとつの困難を乗り越えているが，この不等式をどこまで改良できるかがひとつの問題点である．

３．研究の方法

一般的な問題設定として，コンパクト複素多様体 M と曲率が正の複素直線束 L の組(M,L)，すなわち偏極多様体，に対し，ケーラー形式が $c_1$（L） に属するスカラー曲率一定ケーラー計量（ケーラー・アインシュタイン計量はその特別な場合である）の存在に対する次の予想がある：偏極多様体 (M, L) がケーラー形式が $c_1$（L） に属するスカラー曲率一定ケーラー計量を持つための必要十分条件は K 安定であることである．ここで (M,L) が K 安定とは M のすべての退化に対し，ドナルドソンの定義した"二木不変量"が負になることである．これはヒルベルト・マンフォード判定法を上記の無限次元シンプレクティック多様体に適用したものである．これが，非線形解析の立場からも正当化されることは G. ティアンにより示されている．もともと K 安定性はティアンが定義したものであるが，ティアンは二木不変量を正規代数多様体に退化する場合しか定義できなかったので，もっと一般の退化まで考えることができるようにドナルドソンが定義し直したものである．本研究のもう一つの目的はこの予想の検証を行うことである．

佐々木・アインシュタイン計量の存在問題はケーラー・アインシュタイン計量の存在問題を含む問題で，より一般的立場から問題を見ることで新たな知見を得たい．

また二木不変量と乗数イデアル層とどのような関係があるかを調べたい．

更にスカラー曲率一定計量の存在と漸近的チャウ安定性との関係はドナルドソン，満渕俊樹により得られている．満渕結果は漸近的半安定性の障害が消えているという仮定の下で得られたものである．当該研究者は，満渕の障害は次元と同じ個数の積分不変量が消えることと同値であることを示している．スカラー曲率一定ケーラー計量を持てばこれらの不変量は消えるかどうかを調べたい．

４．研究成果

よく知られているように代数多様体において安定軌道はモーメント写像の零点集合と

１対１に対応する．すなわち，モデユライ空間はモーメント写像の零点集合をコンパクト群のシンプレクティック作用で割った商空間，いわゆる Marsden-Weinstein 商になる．一方シンプレクティイク幾何のアイデアは直ちに無限次元に拡張され，物理学，微分幾何学に応用される．本研究課題においては無限次元シンプレクティック多様体のモーメント写像の零点集合として記述される幾何学的非線形問題を代数幾何的観点，微分幾何的観点，非線形偏微分方程式の観点から研究するものである．このような研究の原型はゲージ理論にある．Atiyah と Bott が指摘したように接続の曲率はゲージ群の作用に関しモーメント写像を与える．ドナルドソンが上述のエルミート・アインシュタイン計量の研究に際しても用いたように，モーメント写像を用いて考えることは，微分幾何的対象と代数幾何的対象のつながりを見る上でだけでなく，どのような考え方で問題解決に望めばいいかという，正しい道筋を知るためにも大変有用である． 実際，コンパクトシンプレクティック多様体 （M, ω）に対し，ω と両立する複素構造全体のなす無限次元多様体を考え，この多様体は自然なシンプレクティック構造を持つこと，そして ω と複素構造が定めるケーラー多様体のスカラー曲率を対応させる写像は，ハミルトン微分同相全体の群の作用に関してモーメント写像になることがわかる．ここでハミルトン微分同相全体の群には複素化は存在せず，リー環の複素化（つまりハミルトン関数全体の複素化,すなわち複素数値関数全体）は存在する．このリー環レベルでの無限小作用は複素構造全体のなす無限次元多様体に葉層構造を定め，各葉が一定のコホモロジー類に属するケーラー形式全体と（ Darboux の定理を介して）微分同相になっている．更に，これまでに知られていたリシネロウィッツ・松島の定理や当該研究者の障害（いわゆる二木不変量）もこの枠組みで理解すれば安定性の障害にもなることもわかる（有限次元シンプレクティック幾何の理論を形式的に無限次元でも適用することにより）．本研究では関連する色々な題材に対し，モーメント写像の理論を適用あるいはその摂動をすることにより，新しいものの見方を発見し，既存の方法で得られなかった知見を得ることができた．例えば， ω と両立する複素構造全体のなす無限次元多様体のシンプレクティック構造を摂動すればモーメント写像も摂動され，対応する非線形偏微分方程式も摂動される．これらの摂動方程式全体を考えることにより，モーメント写像の零点集合の意味，ひいては GIT 安定性の意味が深く理解される．これは当該研究者の見出したアイデアである．これは前述の通り，モーメント写像を考えることにより，何が正しそうで何を証明しようとすればいいかということにたどり着けるということ実践的証明である．

AdS/CFT 対応とは弦理論におけるある種の双対性である．この双対性は重力とゲージ理論という全く違うように見える理論の等価性を主張するものである．一般的言い方では，低次元の佐々木・アインシュタイン多様体の幾何が superconformal field theory と等価であると主張する．従って前者の性質が後者の性質に反映し，また後者の性質は前者の性質に反映する．AdS/CFT 対応の一つの具体的主張は次の予想が正しいという主張である．

予想：AdS5 を５次元反ドジッター空間とする．S を５次元佐々木・アインシュタイン多様体とすると AdS5 ×S 上の type IIB 超弦理論は，4 次元の N = 1 超対称 quiver ゲージ理論と等価である．

ここに，反ドジッター空間とは不定値の定曲率計量空間のことである．またリーマン多様体 S が佐々木多様体とはその錐多様体 C(S) がケーラー多様体であるときをいう．この予想が正しいことを検証するために物理学者は５次元佐々木・アインシュタイン多様体を大量に具体的に構成し, AdS 側の量と CFT 側の対応する量を計算して一致することを確かめることにより AdS/CFT 対応の確かさを検証した．またごく最近では７次元佐々木・アインシュタイン多様体 S に対しても AdS4×S 上の M 理論と３次元の Chern-Simons matter theories なるものが等価と予想され，トーリック の場合に証明されるなどの進展があった．以上の研究の流れからわかるように佐々木・アインシュタイン計量の存在問題は AdS/CFT 対応の研究の進展に大きな役割を果たす．本研究課題の目的は，理論物理における AdS/CFT 対応の研究の数学的基礎付けをゆるぎない形で与えることである．当該研究者は小野肇，Guofang Wang との共同研究で高さ一定のトーリック・ダイアグラムから作られる佐々木多様体は佐々木・アインシュタイン計量を持つことを証明した（ Journal of Differential Geometry,2009）．このことからトーリック佐々木・アインシュタイン多様体はトーリック・ダイアグラムという組み合わせ的データと同一視される．したがって AdS/CFT 対応はトーリックの場合は，トーリック・ダイアグラムという組み合わせ的データと箙(quiver)との対応を与えることに帰着される．ここまでで述べたように，トーリックの場合はかなり良く理解されたと言ってもよい．この先に何があるかを述べるために，順番が前後したが，ここで基本的な用語を準備しよう．まず佐々木多様体 S がトーリックとは，S の錐 C(S) が通常の複素幾

何の意味でトーリック・ケーラー多様体の時をいう．従って dim R S＝2n-1 のとき，n 次元トーラス T n が C(S) に双正則かつ等長的に作用する．これに対し，一般の佐々木多様体 S に対し，C(S) に双正則かつ等長的に作用するトーラスの最大次元 k を S の階数と呼ぶことにする．もちろん k＝n の場合がトーリックである．佐々木多様体は接触多様体であり，その Reeb ベクトル場は Killing ベクトル場であるので，その生成する flow の閉包は T k の部分群をなす．よって階数 k が 1 であるなら Reeb ベクトル場は T1，すなわち円周の作用を生成する．この場合，佐々木多様体がアインシュタイン多様体であるための必要十分条件は，円周による商空間がケーラー・アインシュタイン Fano orbifold であることである．従って階数 1 の佐々木多様体に佐々木・アインシュタイン計量を与える問題は Fano orbifold にケーラー・アインシュタイン計量を与える問題とまったく同じになる．この問題はこれまで当該研究者が研究してきたテーマそのものである．すなわち，このような問題は，ケーラー・アインシュタイン計量を持つ Fano 多様体を幾何学的不変式論（GIT）の意味の安定性で特徴づけられると予想されている．上に述べたように k＝n のときはトーリックであり，この場合は無条件に佐々木・アインシュタイン計量の存在が証明される．この両極端の途中にある 1＜k＜n の場合はどのように佐々木・アインシュタイン多様体は特徴づけられるのであろうか？　また CFT 側にある箙にも GIT 安定性の概念はあるのだろうか？このような問題が今後の基本的な問題である．

　この他，佐野友二氏との共同研究で，二木不変量と乗数イデアル層とどのような関係があるかを調べた．

　更に，小野肇と佐野友二との共同研究で上記の積分不変量は，トーリック Fano 多様体の場合，ヒルベルトシリーズの微分として得られることを示し，具体例に対する計算を実行した．その結果，これ等の張る空間は一般には２次元以上であることを示した．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　６　件）

① Akito Futaki, Hajime Ono and Guofang Wang, Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, Journal of Differential Geometry, 83(2009), 585-636. 査読有

② Akito Futaki and Hajime Ono, Einstein metrics and GIT stability, to appear in Sugaku Expositions. Translated from Sugaku, 60(2008), 175--202 in Japanese. 査読有

③ Koji Cho, Akito Futaki and Hajime Ono, Uniqueness and examples of toric Sasaki-Einstein manifolds, Comm. Math. Phys., 277 (2008), 439-458. 査読有

④ Akito Futaki, Holomorphic vector fields and perturbed extremal K”ahler metrics, J. Symplectic Geom., Vol. 6, No. 2 (2008), 127-138. 査読有

⑤ Akito Futaki, Toric Sasaki-Einstein geometry, Proceedings of 4-th International Congress of Chinese Mathematicians, Hangzhou 2007, (eds. L. Ji et al), Vol. 1, 102-119, Higher Education Press, Beijing, (2008). 査読有

⑥ Akito Futaki, Harmonic total Chern forms and stability, Kodai Math. J. Vol. 29, No. 3 (2006),　346-369. 査読有

〔学会発表〕（計　３　件）

① Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability,
日本数学会，一般講演（小野肇，佐野友二との共同研究），東京大学，２００９年３月２６日－３月２９日．

② 乗数イデアル層と積分不変量，
２００８年３月２２日－２５日，日本数学会年会，　一般講演，（佐野友二との共同研究），近畿大学.

③Einstein 計量と GIT 安定性，
２００８年３月２４日，日本数学会年会，企画特別講演，近畿大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

二木　昭人（FUTAKI AKITO）
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：90143247

(2)研究分担者

無し

(3)連携研究者

森田　茂之（MORITA SHIGEYUKI）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：70011674

満渕　俊樹
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80116192

小林　亮一
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：20162034
芥川　一雄
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号：80192920

中島　啓
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00201666

翁　林
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：60304002