

研究種目：基盤研究 (A)

研究期間：2006～2009

課題番号：18204004

研究課題名 (和文) 3次元多様体の幾何と不変量

研究課題名 (英文) Geometry and invariants of 3-manifolds

研究代表者

小島 定吉 (KOJIMA SADAYOSHI)

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：90117705

研究分野：3次元多様体

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：双曲幾何, 3次元トポロジー, 体積, 位相不変量, 幾何構造

1. 研究計画の概要

(1) 本研究は、幾何化予想の解決を機会に、広範な分野を総動員し、3次元多様体上の幾何と不変量の関係の理解を深め、3次元多様体の世界の鳥瞰図を作成することを目指している。

(2) 上記目標を達成するため、研究代表者とその周辺は、豊富にある不変量を多様体の集合上で定義された写像と見なし、大域幾何 (large scale geometry) の観点から総体的に比較検討を行うこととした。具体的に比較する不変量の対として、擬アノソフ写像 (pseudo-Anosov homeomorphism) のエントロピー (entropy) とその写像柱 (mapping cylinder) の体積、双曲体積 (hyperbolic volume) とヒガード距離 (Heegaard distance)、および単体体積 (simplicial volume) と色付きジョーンズ多項式 (colored Jones polynomial) の特殊値 (special value) のエントロピー極限 (entropy limit) という実数値不変量の三つ組を取り上げ、比較は、比較可能性 (comparability: 有界な誤差を許す双方向線形評価) の観点から行う。さらに、これらの幾何学的不変量と基本群の組合せ的複雑さとの関係を追求することとしている。

(3) 上記の研究代表者周辺の計画に加え、研究分担者、研究連携者が進める3次元多様体の不変量の研究と多角的に連携し、目標の達成に努める。

2. 研究の進捗状況

(1) 擬アノソフ写像のエントロピーとその写像柱の体積については、研究開始直後から研究が順調に進行し、有界幾何 (bounded

geometry) の下で双方向に線形評価があることを証明し、当面の目標を達成した。さらに連携研究者の高沢光彦、および金英子 (東工大情報理工) と共同で、それぞれの最小値、およびシャープな評価についての実験数学的研究を進め、多くの知見をえている。また、さらなる両者の関係の理解の深化を目指し、金・高沢の共同研究が進行中である。

(2) 双曲体積とヒガード距離の比較には、タイヒミュラー空間のヴェイユ・ピータンソン幾何の理解が必須であり、集中的な勉強会を開き、知識獲得を図った。その結果、比較そのものはまだ研究継続中であるが、パイロダクトとして、前項の結果を得る主要なステップをクリアすることができた。

(3) 3番目の対象については、表現の次元に対応し整数で色付けされたジョーンズ多項式の、色に付随するある特殊値 (整数に対応する1のベキ根での値) は、絶対値をとれば、エントロピー極限を取る前の段階で、結び目の数値不変量として色によらず互いに比較可能というワイルドな予想を立て、一つの作業仮説とした。そして、結び目のクラスを限定して実験的研究を進めたが、たまたまこの課題に取り組んでいた学生が退学したため、研究は一時中断している。近いうちに再開したいと考えている。

(4) 研究分担者および研究連携者の下では、本研究の主テーマである3次元多様体の幾何と不変量の理解の深化という観点から、ゲージ理論、写像類群、量子不変量、力学系等の側面で多くの成果が得られている。一つの例を挙げれば、大槻知忠は、結び目のコンセピッチ積分不変量のループ展開の2番目の項の体系的な研究を進め、その系としてロー

ザンスキーによる予想を解決している。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

幾何化予想解決以来、3次元トポロジーの研究は、3次元多様体がつより豊かな構造を注目する方向に向いている。これは、現在の曲面の研究素材としての役割を、次世代では3次元多様体が担うことへの期待の裏返しと言える。

その中で、複雑さを記す指標として、幾何的、あるいは組合せ的に定義されている不変量とトポロジーとの関係を追求することは、研究遂行上必要なステップであり、本研究はすでに十分意味のある成果をいくつか得たと自負している。

一方これまでに得られた成果は、おそらく、当初の期待を大幅に超える思いがけない発見をもたらす程には至っていない。理論研究では短期的にも研究の見通しを立てることは中々難しいが、「おおむね順調に進展」という自己評価は、3年半前に立てた計画に正当性が見いだせ、研究代表者としてそれなりに充実した研究ができたことと、しかしまだやるべきことは多いという実感を重ね合わせた結果である。

4. 今後の研究の推進方策

(1) 当初計画をもってしても、まだやるべきことが残されていることは前項で記した。前項での進行中の話題に加え、とくに、基本群の組合せ的複雑さとの比較がまだ着手できておらず、できるだけ早く具体的方向性を設定したいと考えている。

(2) 一方、研究の進展に伴い、新たな話題も加わっている。とくにヒガード・フロアホモロジーやコバノフホモロジーなど、ゲージ理論を経た新たな、しかもたいへんパワフルな組合せ的不変量が登場している。これの不変量の理解と我々の立場からの解析は、火急の課題である。

(3) 本研究は今年度で終了となるが、現時点では3次元多様体の幾何と不変量の関係は、それなりに理解が進んでいるとはいえ、明快に説明されたとは言いがたい。さらなる深化がつぎの課題となる。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① Eiko Kin, Sadayoshi Kojima and Mitsuhiro Takasawa, Entropy versus volume for pseudo-Anosovs, *Experimental Mathematics*, 2009, in

press, 査読有り.

- ② Sadayoshi Kojima, Circle packing and Teichmüller space, *Handbook of Teichmüller Theory*, volume II, 509-531 (2009), 査読有り.

- ③ Tomotada Ohtsuki, On the 2-loop polynomial of knots, *Geometry & Topology*, 11, 1357-1475 (2007), 査読有り.

[学会発表] (計2件)

- ① Sadayoshi Kojima, Entropy vs volume, KIAS Workshop on Hyperbolic Geometry and Related Topics, 2008/12/15, Korean Institute for Advanced Study.

- ② Sadayoshi Kojima, Comparison of hyperbolic volumes with other invariants, Workshop on hyperbolic structures on 3-manifolds and large scale geometry of Teichmüller space, 2007/7/20, University of Warwick.

[その他]

ホームページ

<http://www.is.titech.ac.jp/~sadayosi/>