

平成 21 年 4 月 1 日現在

研究種目：基盤研究 (A)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18204005
 研究課題名（和文）可積分系による量子コホモロジー・フロベニウス多様体・調和写像の研究
 研究課題名（英文）Research on quantum cohomology, Frobenius manifolds, and harmonic maps related to integrable systems
 研究代表者 Martin Guest (マーティン ゲスト)
 首都大学東京 理工学研究科 教授
 研究者番号：10295470

研究成果の概要：

この研究は可積分系（大きな群対称性を持つ微分方程式系）に関連した現代幾何学の諸問題に関わる研究である。これらの問題は（曲面論を含む）古典的な微分幾何学および量子論と弦理論の幾何学に端を発する。

ループ群や無限次元グラスマン多様体の理論をはじめ、無限次元の手法が用いられる。主要な結果の1つとして、D加群による量子コホモロジーの理論への新しいアプローチが挙げられる。このプロジェクトの大きな特徴は、この研究領域を発展させるために、この分野をリードする国内外の研究者達と共同で研究活動を行うことである。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	6,700,000	2,010,000	8,710,000
2007年度	4,800,000	1,440,000	6,240,000
2008年度	5,700,000	1,710,000	7,410,000
年度			
年度			
総計	17,200,000	5,160,000	22,360,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：幾何学・トポロジー・可積分系・量子コホモロジー・コンピュータ実験・可視化

1. 研究開始当初の背景

可積分系の理論によって Givental の量子コホモロジー D 加群を特徴付けることを意図して、量子コホモロジーに対する新たなアプローチを導入した。基本的アイデアは、論文 M. Guest, Quantum cohomology via D-modules, Topology 44 (2005) 263-281 にある。このアプローチの鍵となる手法は、ループ群に対する Birkhoff 分解である。旗多様体についての D 加群計算や微分方程式の解法については、

Maple を用いた計算が論文 A. Amarzaya and M. Guest, Gromov-Witten invariants of flag manifolds, via D-modules, Jour. London Math. Soc. 72 (2005) 121-136 で与えられている。同様に、首都大院生酒井洋範が超曲面の Gromov-Witten 不変量を計算した。また、L. Mare (Regina)-乙藤隆史 (日本大) と共同で無限次元旗多様体の場合を研究している。さらに D 加群の観点から量子コホモロジーと可積分系の関係 (Givental,

Witten-Kontsevich の結果等) が明らかになる。量子コホモロジーへの上記の D 加群を使ったアプローチは、フロベニウス多様体へも応用される。また、J. Bolton (Durham) との共同研究による曲面から例外型リー群への調和写像の研究に関する進展として、 G_2 への有限ユニオン数の調和写像に対する方程式を研究し、Bryant の結果を一般化した。さらに、首都大院生 Carrillo, 矢部が Maple を使って Pfaffian 系の対称群を計算し、調和写像の対称群を調べた。

2. 研究の目的

可積分系の理論は幾何学・トポロジーの研究に多くの新しい研究対象・方法・アイデアを与えた。逆に幾何学・トポロジーの研究は可積分系のより洗練された幾何学的な研究方法を提供している。本研究課題では曲面の幾何学と調和写像、フロベニウス多様体と量子コホモロジーなど可積分系に派生した対象の幾何学・トポロジーの総合的研究を推進する。

平均曲率一定曲面と 2 次元球面または 2 次元トーラス面からコンパクト・リー群および対称空間への調和写像に関して、これまでに多くの結果が得られている。より一般に、これらの結果はある種の部分多様体や多重調和写像に拡張される。目的の一つは、これらの結果を統一し、さらに拡張することである。B. Dubrovin によって最近発見されたフロベニウス多様体は、いくつかの重要な可積分系に対する自然な幾何学的枠組みを与える。これらには、KdV 方程式や微分幾何学における種々のソリトン方程式が含まれている。我々は、この新しい理論を微分幾何学における問題に適用することを計画している。

本研究課題において、量子コホモロジーの微分方程式と調和写像論・部分多様体論の微分方程式の間の具体的関係を研究することを計画している。論文 M. Guest, Quantum cohomology via D-modules, Topology 44 (2005) 263-281 において量子コホモロジーに対する新たなアプローチを導入した。このアプローチの鍵となる手法はループ群に対する Birkhoff 分解である。これは、調和写像論における DPW 法 (J.

Dorfmeister-F. Pedit-H. Wu) においても用いられている。量子コホモロジーに対する Givental 接続 (Dubrovin 接続) は、正規化された DPW ポテンシャルと同じ役割をなす。調和写像理論においては様々な研究手法により既に豊富な結果が得られている。これらの研究結果を抽象的量子コホモロジー (abstract quantum cohomology) の研究に応用することを目指している。

3. 研究の方法

曲面の幾何学と調和写像、フロベニウス多様体と量子コホモロジーなど可積分系に派生した対象の幾何学・トポロジーの総合的研究を推進する。特に、次の進展を目指す。

- (A) ループ群の方法を使って部分多様体・調和写像・量子コホモロジー・フロベニウス多様体から得られる可積分系の研究。
- (B) 偏微分方程式の自己双対優決定系によるフロベニウス多様体の新たな構成。
- (C) (B) の立場から量子コホモロジーの具体的な例の研究。
- (D) 軌道体量子コホモロジーの D-加群的計算。

4. 研究成果

研究代表者の本研究課題の 1 つ目の成果は "From Quantum Cohomology to Integrable Systems" (M. Guest, Oxford University Press, 2008) の執筆、刊行である。この本は D-加群を用いて定式化されており、具体的な結果としては

- (a) D-加群を拡張することで可積分系を構成する手法 (4, 7 章),
- (b) アブストラクト量子コホモロジーの定義と基本的な性質 (6 章),
- (c) 無限次元グラスマンに対する D-加群の幾何学的な表現としての解釈 (8 章), (d) 多重調和写像に対する Krichever-DPW 対応の例としてのミラー対称性の定式化 (10 章) が挙げられる。

2 つ目は進行中の研究における新しい結果である。これは次の 2 つを始め、準備中の多数の論文を含む。"Orbifold quantum D-modules associated to weighted projective spaces" (M. Guest, H. Sakai, preprint, 2008)、"The tt^* structure of the quantum cohomology of CP^1 from the viewpoint of differential geometry" (J. Dorfmeister, M. Guest, W. Rossmann, preprint, 2008)。

宮岡 (東北大学)・大仁田 (大阪市立大学) 両氏と次に挙げる微分幾何学と可積分系の国際研究集会を共催した。これらは毎年開催され、シリーズ化されているものである。

2000 年 7 月 (第 9 回 MSJ 国際研究集会) (東京大学), 2003 年 1 月 (首都大学東京), 2003 年 7 月 (神戸大学),

2004 年 11 月 (九州大学), 2006 年 1 月 (大阪市立大学), 2006 年 8 月 (84th LMS Durham Symposium) (University of Durham), 2007 年 9 月 (京大数理研), 2008 年 12 月 (大阪市立大学)。これらの研究集会により、「微分幾何学と可積分系」は日本国内で研究分野として一般的となり、更に海外の研究者達との強い繋がりが作られた。特に A. Bobenko, F. Burstall, J. Dorfmeister, F. Pedit, R. Palais, U. Pinkall, C. Terng といった海外の有能な研

研究者が幾度も(2回以上)研究集会に参加する為に来日している。また2008年12月にIPMUや大阪市立大で共同研究や講演予定の可積分系・物理学におけるdualityを専門とするB. Eynard氏の来日の援助のように、海外から多くの研究者を招聘し、共同研究や研究集会での講演を援助している。

研究支援者の黒須早苗に対する給与(1部): 研究支援者は研究活動、研究集会開催の補助の以外に2種類のサーバーのメンテナンスを含むコンピュータ関連の仕事も請け負う。

<http://tmugs.math.metro-u.ac.jp/>では幾何学活動・研究の電子情報、ゲストと連携研究者の酒井がメンバーを務め3D-XplorMath Consortiumなどの幾何学ソフトウェアに関する情報を収集・公開している。また、<http://geom.math.metro-u.ac.jp/>は日本数学会幾何学分会ホームページを含むサーバーである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 29 件)

① S. V. Ketov, O. Lechtenfeld
Non-anticommutative solitons.
Phys. Lett. B 663 (査読有) (2008)353-359

② M. Iihoshi, S. V. Ketov
On the quartic curvature gravity in the context of FRW cosmology.
Internat. J. Modern Phys. A (査読有) 23(2008)2153-2160.

③ E. A. Bartolo, J. Cogoludo, H. Tokunaga
A survey on Zariski pairs.
Adv. Stud. Pure Math., 50, (査読有)
Math. Soc. Japan, Tokyo (2008) 1-100.

④ M. Kobayashi
Duality of Weights, Mirror Symmetry and Arnold's Strange Duality.
Tokyo Journal of Mathematics, (査読有)31 (2008)225-251.

⑤ Y. Maeda, A. Sako
Noncommutative deformation of instantons.
J. Geom. Phys. (査読有) 58(2008)1784-1791.

⑥ Y. Maeda, A. Sako
Are vortex numbers preserved?
J. Geom. Phys. (査読有) 58(2008)967-978.

⑦ Y. Kawakami, R. Kobayashi, R. Miyaoka
The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces.
Forum Math. (査読有) 20(2008)1055-1069.

⑧ 西本啓一郎, 中村憲
Otu2000の鍵生成および関連する問題について,
日本応用数学会論文誌, (査読有)18(1)

(2008)185-197.

⑨ K. Nakamura
On the proof that $\{\text{PRIMES}\}$ is in $\{P\}$
Sugaku Expositions, (査読有)21(2) (2008)161-176.

⑩ S. Tanaka and K. Nakamura
Constructing pairing-friendly elliptic curves using factorization of cyclotomic polynomials,
In Pairing-Based Cryptography - Pairing 2008}, (査読有)Vol. 5209 of LNCS(2008), 136-145.

⑪ 小泉, 宮澤, 内山, 中村憲
Knapsack 暗号への攻撃を効果的にするための sampling reduction の改良と考察.
日本応用数学会論文誌, (査読有)18(4), (2008)687-701.

⑫ C. A. Antonio, S. Tanaka, and K. Nakamura
平方ペアリングの実装効率について.
日本応用数学会論文誌, (査読有)18(4), (2008)703-721.

⑬ H. Tokunaga, E. A. Bartolo, J. Cogoludo
Pencils and infinite dihedral covers of P^2 , Proc. Amer. Math. Soc., (査読有) 136(2008)21-29

⑭ S. Ketov, T. Hatanaka
 $N=1/2$ supergravity with matter in four Euclidean dimensions.
Nucl. Phys. B (査読有)794(2008)495-511

⑮ M. Guest, T. Otofujii
Mirror symmetry and D-modules.
Sugaku Seminar, (査読無)46(2007)76-82.

⑯ S. Bannai, H. Tokunaga
A note on embeddings of S_4 and A_5 into the two-dimensional Cremona group and versal Galois covers.
Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43 (査読有) (2007) 1111-1123

⑰ M. Akaho
Morse homology and manifolds with boundary.
Commun. Contemp. Math. (査読有) 9(2007)301-334.

⑱ H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka
Orderings and non-formal deformation quantization.
Lett. Math. Phys. (査読有) 82 (2007) 153-175.

⑲ P. Bieliavsky, P. Bonneau, Y. Maeda
Universal deformation formulae, symplectic Lie groups and symmetric spaces.
Pacific J. Math. (査読有) 230(2007)41-57.

⑳ T. Kohno
The volume of a hyperbolic simplex and iterated integrals.

Ser. Knots Everything (査読有) 40, World Sci. Publ., (2007)179-188.

㉑ T. Sakai

Transferred kinematic formulae in two point homogeneous spaces.

Tsukuba J. Math. (査読有)31(2007)343-354.

㉒ M. Akaho

Quasi-isomorphisms of A-infinity-algebras and oriented planar trees.

Illinois J. Math. (査読有)51(2007)325-338.

㉓ Y. Ohnita

Stability and rigidity of special Lagrangian cones over certain minimal Legendrian orbits.

Osaka J. Math. (査読有)44(2007)305-334.

㉔ H. Terao

Chambers of arrangements of hyperplanes and Arrow's impossibility theorem.

Adv. Math. (査読有)214(2007)366-378.

㉕ S. Kobayashi

Asymptotics of ends of constant mean curvature surface with bubbletons.

Proc. Amer. Math. Soc. (査読有)136(2007)1433-1443.

㉖ T. Hatanaka, S. V. Ketov

$\mathcal{C}\mathcal{S}$ -deformation of supergravity.

Classical Quantum Gravity (査読有)23(2006)L45-L50.

㉗ E. A. Bartolo, J. Cogoludo, H. Tokunaga

Nodal degenerations of plane curves and Galois covers., Geom. Dedicata 121 (査読有) (2006) 129-142.

㉘ M. Akaho

A connected sum of knots and Fintushel-Stern knot surgery on 4-manifolds., Turkish J. Math. (査読有)30(2006)87-93

㉙ R. Miyaoka

Classification of isoparametric hypersurfaces with for principal curvatures by T. E. Cecil, Q. R. Jensen., Sugaku, (査読有)58(2006)225-238.

[学会発表] (計 30 件)

① 小林正典,

トポロジカル幾何と超離散系の展開

京都大学グローバルCOEプログラムセミナー (2009. 3. 10) 鈴鹿医療科学大学薬学部

② M. Guest, Differential geometric aspects of quantum cohomology, 大阪市立大学(2009. 2. 4). (集中講義)

③ M. Guest, Differential geometric aspects of quantum cohomology, つくば大学 (2009. 2. 10) (Geometry seminar 招待講演).

④ 赤穂まなぶ, Immersed Lagrangian Floer theory, Quantum algebra related to various topological field theories in geometries, 京都大学(2009. 2. 16)可積分系セミナー.

⑤ K. Nakamura, Quantum Public Key Cryptosystem and Implementation over Imaginary Quadratic Fields, Univ. of Sydney(2009. 2. 12)

⑥ 小林正典, 離散力学系の分子細胞生物学への応用数理, 京都大学(2009. 1. 8)

⑦ M. Guest, Pluriharmonic maps and quantum cohomology^{1,2}, Ruhr-University Bochum (2008. 6. 23/24). (招待講演)

⑧ M. Guest, Towards differential geometric mirror symmetry, University of Tübingen (2008. 7. 11). (招待講演)

⑨ M. Guest, From quantum cohomology to integrable systems, University of Hamburg (2008. 7. 3). (招待講演)

⑩ M. Guest, Isotropic pluriharmonic maps, special geometry, and mirror symmetry, University of Augsburg (2008. 7. 18). (招待講演)

⑪ M. Guest, Differential geometric aspects of quantum cohomology, "Pacific Rim Geometry Conference", Taipei (2008. 12. 14). (招待講演)

⑫ M. Guest, A differential geometric interpretation of the quantum cohomology of $\mathbb{C}P^1$, 首都大学東京 (2008. 10). (招待講演)

⑬ M. Guest, A differential geometric interpretation of the quantum cohomology of $\mathbb{C}P^1$, 慶應大学 (2008. 10. 20). (招待講演)

⑭ 赤穂まなぶ, Immersed Lagrangian Floer theory, Fujisan 1-day Workshop in Geometry and Topological field theories in geometries, National Cheng Kung University(2008. 12, 27)

⑮ 赤穂まなぶ, Immersed Lagrangian Floer theory, IPMU seminar, IPMU (2008. 12. 11)

⑯ S. Tanaka, K. Nakamura, Constructing pairing-friendly elliptic curves using factorization of cyclotomic polynomials, Univ. of London(2008. 9. 1)

⑰ K. Nakamura, Invitation to the NZMATH system for number theory, Univ. of the Philippines Diliman(2008. 5. 24) (招待講演)

⑱ 赤穂まなぶ, ラグランジュはめ込みのフレー理論, 東京大学(2008. 4. 30)

⑲ M. Guest, The unity of mathematics, 首都大学東京、談話会 (2007. 12. 13). (招待講演)

⑳ M. Guest, Exploring the Toda lattice with 3D-XplorMath, "40 Years of the Toda Lattice", 九州大学応用力学研究所

(2007.11.8) . (招待講演)

⑳ M.Guest , Differential equations aspects of quantum cohomology, University of British Columbia (2007.8.27) . (招待講演)

㉑ M.Guest, Quantum cohomology and integrable systems, “Geometric and Topological Methods in Quantum Field Theory”, Villa de Leyva, Colombia, summer school lecture series (2007.7.9-18). (招待講演)

㉒ M.Guest, Mirror symmetry: some differential geometric examples, 名古屋大学 (2007.5.29). (招待講演)

[24] M.Guest, Three remarks on singularities of harmonic maps, Workshop on “ Geometric Analysis, Sendai 2007” , 仙台 (2007.1.14) . (招待講演)

㉓ M.Guest, Solutions of integrable systems: theory and visualization, 大阪市立大学、談話会と集中講義 (2007.1.10) (招待講演)

㉔ M.Guest, Pfaffian systems from harmonic maps. Ireland-Japan Workshop on Geometry and Dynamical Systems. , Keio University. 2006.12.19. (招待講演)

㉕ M.Guest, Towards differential geometric mirror symmetry. Tohoku University. Colloquium. 2006.11.27. (招待講演)

㉖ M.Guest, Mirror symmetry structures in differential geometry and complex geometry. , Nagoya University. Geometry seminar. 2006.9.20. (招待講演)

㉗ M.Guest, Harmonic maps and quantum cohomology, University of Durham. LMS Symposium on Methods of Integrable Systems in Geometry. Seminar. 2006.8.16. (招待講演)

㉘ M.Guest, From quantum cohomology to integrable systems, OCAMI International Conference on “Geometry, Integrable Systems and Visualization”, 26-29 January 2006, Osaka City University Media Center, Main Hall, 2006.1.28. (招待講演)

[図書] (計 1 件)

① From quantum cohomology to integrable systems

M.Guest, Oxford University Press 2008 xxx+305 pp (著書)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ

<http://tmugs.math.metro-u.ac.jp/>

<http://www.comp.metro-u.ac.jp/~martin/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

Martin Guest (マーティン ゲスト)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号: 10295470

(2) 研究分担者

徳永 浩雄 (トクナガ ヒロオ)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号: 30211395

中村 憲 (ナカムラ ケン)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号: 80110849

小林 正典 (コバヤシ マサノリ)

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号: 60234845

Sergei V. Ketov (セルゲイ ケトフ)

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号: 70347269

赤穂 まなぶ (アカホ マナブ)

首都大学東京・理工学研究科・助教

研究者番号: 30332935

(3) 連携研究者

前田 吉昭 (マエダ ヨシアキ)

慶應大学・理工学部・教授

研究者番号: 40101076

宮岡 礼子 (ミヤオカ レイコ)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号: 70108182

河野 俊丈 (コウノ トシタケ)

東京大学・数理科学研究科・教授

研究者番号: 80144111

大仁田 義裕 (オオニタ ヨシヒロ)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 90183764

寺尾 宏明 (テラオ ヒロアキ)

北海道大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 90119058

菅野 浩明 (カンノ ヒロアキ)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・

教授 研究者番号: 90211870

乙藤 隆史 (オトフジ タカシ)

日本大学・工学部・講師

研究者番号: 70339266

小林 真平 (コバヤシ シンペイ)

弘前大学・大学院理工学研究科・助教

研究者番号: 40408654

酒井 高司 (サカイ タカシ)

大阪市立大学・大学院理学研究科・特任研

究員 研究者番号: 30381445