様式C-7-2

自己評価報告書

平成２１年３月３１日現在

研究種目：基盤研究（A）
研究期間：2006～2009
課題番号：18204006
研究課題名（和文）　幾何学と物理学の統合によるポアソン幾何学から非可換微分幾何学への展開
研究課題名（英文）　Perspectives on noncommutative differential geometry from Poisson Geometry through integrating geometry and physics

研究代表者
前田　吉昭（MAEDA YOSHIAKI）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：40101076

研究分野：幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：変形量子化、非可換幾何学、超弦理論

１．研究計画の概要

本研究は、「量子的現象」を数学的な立場からアプローチをするために、非可換幾何学と変形量子化の２つの手法を発展させ、非可換微分幾何学の構築とその展開を行うことを目的とする。そのためには、数学と物理学の研究を連携させ、物理学における量子的現象を数学の基盤にのせることにより、数学と物理学分野の統合を行うことである。幾何学としては、シンプレクティック幾何学をさらに一般化させたポアソン幾何学とシンプレクティックトポロジーの２側面を基盤として、その上に量子化の概念を数学として設定していくことで、非可換微分幾何学の構築を行い、様々な応用を行う。

２．研究の進捗状況

変形量子化問題の研究として、収束する変形量子化問題について扱った。ここでは、非可換な代数の典型であるワイル代数を元にして、複素2n 次元空間に入れたモイヤル積を拡張して Entire function にモイヤル積を定義することを考察した。Entire function の無限遠での挙動（指数発散オーダー）によりモイヤル積の収束性が示せること、特に指数発散オーダーが２次の関数については、結合律が満たされないことが分かる。そこで、２次形式の非可換指数関数を構成することから、様々な現象が現れ、それについて研究を進めている。２次の非可換指数関数の性質を詳しくしらべること、特に積公式を具体的に表示することから、２次の非可換指数関数の群構造を把握することに成功し、それにより、今までの群概念よりかなり緩やかな概念を創出できてきている。現在、この現象を数学として明確な設定にするために大掛かりにはなるが、基本的な枠組みの構築を進めている。非可換ゲージ理論では、２次元非可換 vortex 数や４次元 instanton 数の剛性についての結果が明らかにされ、さらに４次元での ADHM−Yang Mills 方程式対応の非可換化に取り組んでいる。非可換幾何学を用いた指数定理の研究が進められた。特に境界つき多様体の指数定理について明らかな進展が進んでいる。これには、森吉−夏目によって開発された手法がさらに一般的に用いられることが明らかにされてきている。無限次元ループ空間の幾何学について、超弦理論の立場からの幾何学的アプローチについても研究を進めている。特に、ループ空間の指数定理へのアプローチとして擬微分作用素の Wodzicki トレースを利用した特性類の定義についての研究を始めている。これらの問題には、素粒子論および超弦理論の研究者との討論から共同研究にも発展している。、「Noncommutative Geometry and Physics 2005」や「Operator algebras and Geometry」の出版等により、本研究グループの成果を積極的に発信している。

３．現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。
その理由は以下である。
本研究は、国際的に立ち遅れていると見える非可換幾何学の研究分野を、幾何学、トポロジー、代数学、解析学等で国際的に評価が高い成果をもとにして、日本独自のアイデアで新しい研究分野の構築とその展開に向かい独創的なアイデアで成果を生み出すことに成功している。本研究は国際的にも高い注

目を受け、十分な成果も得られており、達成度はかなり高いと自負している。

４．今後の研究の推進方策
現在の研究をさらに推し進めて、非可換代数を扱う手法での様々な応用を進めていく。非可換ゲージ理論でのインスタントン数の変形問題、ループ空間の幾何学でのチャーン・サイモン理論の展開等への応用へ広げることで、物理学との関連へ挑戦していく。

５．代表的な研究成果
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計　12　件）

① Hideki Omori, Maeda, Yoshiaki, Naoya Miyazaki, Akira Yoshioka, Expressions Expressions of algebra elements and transcendental noncommutative calculus. Noncommutative geometry and physics 2005, *3-30,* World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007（査読有).

② Maeda, Yoshiaki, Kajiura, Hiroshige String theory and deformation quantization, Sugaku Expositions. *Sugaku Expositions* 20 (2007), no. 2, 191–214（査読有）.

③ Omori, Hideki, Maeda,Yoshiaki; Miyazaki, Naoya; Yoshioka, Akira, Orderings and non-formal deformation quantization. *Lett. Math. Phys.* 82 (2007), no. 2-3, 153–175（査読有）.

④ Maeda, Yoshiaki, Sako, Akifumi, Are vortex numbers preserved? *J. Geom. Phys.* 58 (2008), no. 8, 967–978（査読有）.

⑤ Bieliavsky, Pierre; Bonneau, Philippe; Maeda, Yoshiaki, Universal deformation formulae, symplectic Lie groups and symmetric spaces. *Pacific J. Math.* 230 (2007), no. 1, 41–57（査読有）.

〔学会発表〕（計　5　件）

① 前田吉昭、佐古彰史;Noncommutative deformation of Instantons,2009年3月28日,日本数学会(東京大学)

② 前田吉昭;Geometry of Loop spaces, 2007年9月24日, 日本数学会（東北大学）

③ 前田吉昭；Deformation quantizations and noncommutative caluculus, Chern Institute, 2007年8月28日（北京チャーン研究所）

④ 前田吉昭；Expressions of algebra elements and transcendental noncommutative caluculus, Differential Geometry, Mathematical Physics, Mathematics and Society, 2007年8月29日, IHES（フランス高等科学研究所）

⑤ 前田吉昭; Deformation Quantizations and Gerbes, KIAS Colloquim、2006年2月15日、韓国高等科学研究所.

〔図書〕（計　４　件）

① Hitoshi Moriyoshi, Toshikazu Natsume, Operator algebras and Geometry, AMS, 2008, 155ページ.

② Yoshiaki Maeda, et al, Noncommutative Geometry and Physics, World Scientific, 2007, 378ページ.

以上