

平成22年5月24日現在

研究種目： 基盤研究（A）
 研究期間： 2006 ～ 2009
 課題番号： 18204008
 研究課題名（和文） 双対性から見た等質空間とユニタリ表現の現代的研究
 研究課題名（英文） Modern study on homogeneous spaces and unitary representations
 via duality
 研究代表者
 山下 博（YAMASHITA HIROSHI）
 北海道大学・大学院理学研究院・教授
 研究者番号： 30192793

研究成果の概要（和文）： 表現や群軌道に関する様々な双対性に焦点を当て、半単純リー群の表現論と等質空間上の解析学の新たな展開を目指した。その結果、ユニタリ最高ウェイト加群に対する等方表現と一般Whittakerモデルが表現のデータ対応に関するHowe双対性を制御していることが明らかになった。また、離散系列、退化主系列表現に対する幾何学的不変量の記述、旗多様体上の松木双対性の複素解析的延長、一般Verma加群の間の準同型の分類等々について多様な研究を実施し、数多くの重要な成果を得た。

研究成果の概要（英文）： We have aimed at new development of representation theory of semisimple Lie groups and harmonic analysis on homogeneous spaces, by focusing our attention to various duality concerning representations and group orbits. Among other things, the Howe duality correspondence has been clearly understood in connection with generalized Whittaker models and isotropy representations for unitary highest weight modules. We have studied geometric invariants for discrete series and degenerate principal series representations. Significant achievements of this research project include complex analytic continuation of the Matsuki duality on flag variety, classification of homomorphisms between generalized Verma modules, and numbers of contributions by other related researches.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	7,900,000	2,370,000	10,270,000
2007年度	9,100,000	2,730,000	11,830,000
2008年度	7,900,000	2,370,000	10,270,000
2009年度	7,100,000	2,130,000	9,230,000
年度			
総計	32,000,000	9,600,000	41,600,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：半単純リー群，ユニタリ表現，冪零軌道，幾何学的不変量，Howe双対性，Whittakerモデル，旗多様体，微分方程式系

1. 研究開始当初の背景

半単純リー群の無限次元ユニタリ表現の研究は、調和解析学、関数解析学、代数解析学あるいは保型関数論をはじめとする多くの分野と深く関わり合いながら、飛躍的な発展をとげてきた。表現論と非可換調和解析の基本問題に対する研究成果の蓄積を踏まえて、リー群の表現の研究は現在次なる発展のフェーズを迎えている。つまり、表現と密接に関わる等質空間・群軌道の構造と新たな視点から関連づけて深く追究することによって、表現論自身の深化及び多様な数学分野との連携の両面で、大きな進展が期待できる状況にある。極小表現や特異ユニタリ表現に関する近年の研究の動向もこの状況を反映している。

2. 研究の目的

本研究では、半単純リー群の表現や群軌道に関する様々な双対性に焦点を当て、既約ユニタリ表現の代数的・幾何学的不変量を記述し、誘導表現への既約表現の埋め込みを特定することなどによって、ユニタリ表現論と等質空間上の解析学の新たな展開を目指す。同時に、対称性の高い関数方程式系、無限次元調和解析、実解析、組合せ論等、本課題と深く繋がる諸テーマとの連携を図ることにより、より広い視野からの研究を進める。

3. 研究の方法

(1) 実半単純リー代数の各冪零軌道に付随して定まる一般 Gelfand-Graev 誘導表現の系列を考察し、既約ユニタリ表現から同誘導表現への埋め込み、いわゆる一般 Whittaker 模型に関連して、双対性の視点から研究を行った。特に、簡約双対対に関する既約表現の Howe 双対性 (テータ対応) 及びその Dvorski-Sahi による拡張に着目し、この双対性定理と一般 Whittaker 模型の間の相互関係を調べるという方法をとった。

(2) 一般 Whittaker ベクトルのなす空間上に生じる表現を精査した。特に、半単純リー群の既約表現に対する幾何学的不変量 (随伴サイクル, 等方表現) を重点的に扱うとともに、有限 W -代数の表現としても検討した。そのために、一般 Verma 加群の間の準同型、旗多様体上の軌道構造と松木双対性、モーメント写像の一般ファイバー等について、基盤的な研究を進めた。

(3) 上記 (1), (2) と直接に関連する方向では、Whittaker 関数と超幾何微分方程式系、Capelli 型恒等式の代数的研究、対称対に関する冪零軌道の組合せ論的研究、有界等質領域や鏡映群に係る幾何学的研究等に焦点を当てた。

(4) 本課題と深く繋がる諸テーマとの連携を図るための方法として、各種の微分作用素環とその表現、Dynamical Yang-Baxter 写像と可積分系、Wavelet 解析における実解析的手法等、研究組織メンバーの自由な発想に基づく多様な研究を取り入れた。

(5) 以上の方法による研究を実施するため、“NORTHERN workshop on Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras-NORTH7 (2007年3月)”, 国内初の PRIMA 国際会議 “Representation Theory, Systems of Differential Equations and their Related Topics (2007年7月)”, Vogan 教授を招いた “Sapporo Lectures on Representations in Lie Theory (2007年8月)”, “The 9th workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory-NORTH9 (2010年2月)”, 「第46回実函数論・函数解析学合同シンポジウム」(2007年8月), 「表現論シンポジウム」(毎年11月)等、計12件の研究集会(うち国際会議が6件)を開催し、本課題研究を機動的に推進した。

4. 研究成果

(1) 研究代表者は簡約双対対 (一方がコンパクト群の場合) に対する Howe 双対性定理を、ユニタリ最高ウェイト加群に対する等方表現あるいは一般 Whittaker 模型を用いて新たな方法で証明することに成功した (阿部紀行との共同研究)。さらに、テータ対応に現れるコンパクト群の既約表現を、等方表現に係る分岐理論を用いて記述した。これらの研究成果によって、Howe 双対性、一般 Whittaker 模型及び等方表現 (随伴サイクル) という、一見異なる3つの研究対象が相互に深く結びついている様子が具体的に明らかになった。この成果をもとに、双方がコンパクトでない簡約双対対に対する研究の展望を得ている。

(2) さらに研究代表者は、離散系列に対する等方表現の構造について、勾配型不変微分作用素による理論を Barchini-Zierau の結果を援用して深化させ、極小 K 型による明瞭な

理解に到達した. これにより, 旗多様体上のモーメント写像の一般ファイバーを用いた随伴サイクルの記述 (J.-T. Chang) が, 離散系列のリーマン対称空間上での構成理論の枠組みではっきりと捕らえられた.

西山亨は半単純軌道の漸近錐が冪零軌道なることを示し, 直交群等のある種の退化主系列の既約成分の随伴サイクルを特定した.

松本久義は連続 Whittaker ベクトルの空間が W -代数の既約表現を与えることをいくつかの古典群の場合に明らかにするとともに, 当該加群の既約性について, ある種の群の作用をも合わせて考えた, より自然な予想を提示し, 不定値特殊直交群等の場合にこの予想を証明した. また, スカラー型一般 Verma 加群の間の準同型の分類についての研究を大きく進展させた.

谷口健二は標準 Whittaker 加群の組成列についての創始的研究を行い, 階数 1 のユニタリ群の場合に当該組成列を決定した.

旗多様体の幾何について, 松木敏彦は軌道の松木双対性の複素解析的延長に関わる一連の研究を完成させ, 「ごく少数の自明な例外を除き, 松木対応の複素拡張領域 (の単位元連結成分) は Akhiezer-Gindikin 領域 (複素冠状領域) と一致する」ことを証明した論文を発表した.

(3) 関口次郎は対数的自由因子とそのような因子に沿って特異点をもつ一意化方程式を研究し, 階数 3 の鏡映群の判別式から定まる 3 次元アフィン空間内の超曲面に対して, 一意化方程式を求めた.

和地輝仁は Soo Teck Lee, 西山亨と共同で対称対に関する Capelli 恒等式を構成した. さらに対称対の冪零軌道に関する組合せ論的研究を進め, 冪零軌道の個数等についての明示公式を得た.

伊師英之は有界等質領域の標準的な有界実現 (Harish-Chandra 実現の一般化) としての代表領域の研究, 示野信一は Heckman-Opdam 超幾何微分作用素と超幾何関数についての研究を, それぞれ進展させた.

(4) 齋藤睦はアフィン半群環の微分作用素環 D が右ネターであることを示し, 左ネターになるための十分条件を与えた. また, 微分作用素の階数による次数環 $\text{Gr}(D)$ がネター環のとき (つまり, 半群が scored なとき) に, $\text{Gr}(D)$ の素イデアルを記述し, ある種の単項生成クリティカル加群の特性多様体を記述した.

澁川陽一はある条件を満たす Dynamical Yang-Baxter 写像を分類した. 結果として, 群の演算から定義される $ab^{-1}c$ という ternary operation の一般化と Dynamical Yang-Baxter 写像が深く関連していること

を示した.

河添健はヤコビ解析における特異積分作用素の有界性を調べ, Poisson 核に付随した特異積分作用素として Poisson 最大関数, Littlewood-Paley g -関数, Lusin area 関数を取り上げ, その (H^1, L^1) 有界性を示した.

立澤一哉は重み付き Triebel-Lizorkin 空間あるいは重み付き Herz 空間において, wavelet 基底が無条件基底になっていること及び greedy 基底になっていることを示した.

これらの成果に加えて, 山口佳三による微分式系の幾何学の先端的な研究, 吉田知行による有限群上のランダムウォークを用いた代数統計に関する研究等々によって, 本研究の目的に則した多様な研究成果が得られた.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 38 件)

[1] Noriyuki Abe and Hiroshi Yamashita, A note on Howe duality correspondence and isotropy representations for unitary lowest weight modules of $Mp(n, \mathbf{R})$, Journal of Lie Theory, 19, 2009, 671-683, 査読有.

[2] Soo Teck Lee, Kyo Nishiyama and Akihito Wachi, Intersection of harmonics and Capelli identities for symmetric pairs, J. Math. Soc. Japan, 60, 2008, 955-982, 査読有.

[3] Toshihiko Matsuki, Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds III, Transactions of American Mathematical Society, 359, 2007, 4773-4786, 査読有.

[4] Hisayosi Matumoto, Derived functor modules arising as large irreducible constituents of degenerate principal series, Compositio Math., 143, 2007, 222-256, 査読有.

[5] Youichi Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 43, 2007, 1157-1182, 査読有.

[学会発表] (計 47 件)

[1] Hiroshi Yamashita, Generalized Whittaker models for Harish-Chandra modules, 2009 Nankai summer school, Representation Theory and Harmonic

Analysis, 7-12 June 2009, Chern Institute of Mathematics, Nankai Univ., China.

[2] Jiro Sekiguchi, Unitary reflection groups and uniformization differential equations, Conference in honor of Professor Toshio Oshima's 60th birthday, Differential Equations and Symmetric Spaces, 14 January 2009, Univ. of Tokyo, Japan.

[3] Kyo Nishiyama, Asymptotic cone of semisimple orbit for symmetric pairs, Functional Analysis X: Representation Theory, 1 July 2008, Croatia.

[4] Hideyuki Ishi, Matrix T-algebras and Jordan algebras, Hermitian Symmetric Spaces, Jordan Algebras and related problems, 23 June 2008, Luminy, France.

[5] Mutsumi Saito, Critical modules of rings of differential operators of affine semigroup algebras, AMS central sectional meeting, special session on D-modules, 5 April 2008, Indiana Univ., USA.

[図書] (計 1 件)

[1] 山下 博 (述), 阿部紀行 (記), 簡約リ一群の表現と冪零軌道, 東京大学数理学レクチャーノート 3, 東京大学, 80 ページ, 2008.

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/publication/lecturenote.html>

[その他]

ホームページ等

[1] NORthern workshop on Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/coe/sympo/070306/>

[2] Representation Theory, Systems of Differential Equations and their Related Topics
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/coe/sympo/070702/index.html>

[3] 第 46 回実関数論・函数解析学合同シンポジウム
<http://mathsoc.jp/section/fctanalysis/2007.html>

[4] Sapporo Lectures on Representations in Lie Theory: An introduction and the beyond
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/coe/sympo/070827/index.html>

[5] 北海道大学数学公開講演会
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/coe/sympo/070828/index.html>

[6] 「表現論シンポジウム」講演集の電子化・公開
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/coe/sympo/psrt/>
<http://dml.ms.u-tokyo.ac.jp/PSRT/>

[7] The 9th workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/100219/index_en.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山下 博 (YAMASHITA HIROSHI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 30192793

(2) 研究分担者

吉田 知行 (YOSHIDA TOMOYUKI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 30002265

山口 佳三 (YAMAGUCHI KEIZO)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 00113639

齋藤 睦 (SAITO MUTSUMI)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 70215565

澁川 陽一 (SHIBUKAWA YOUICHI)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 90241299

立澤 一哉 (TACHIZAWA KAZUYA)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 80227090

河添 健 (KAWAZOE TAKESHI)
慶應義塾大学・総合政策学部・教授
研究者番号: 90152959

松本 久義 (MATUMOTO HISAYOSI)
東京大学・大学院数理学研究科・准教授
研究者番号: 50272597

谷口 健二 (TANIGUCHI KENJI)
青山学院大学・理工学部・准教授
研究者番号: 20306492

和地 輝仁 (WACHI AKIHITO)
北海道教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：30337018

西山 享 (NISHIYAMA KYO)
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：70183085
(2008年度は連携研究者)

松木 敏彦 (MATSUKI TOSHIHIKO)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：20157283
(2008年度以降は連携研究者)

関口 次郎 (SEKIGUCHI JIRO)
東京農工大学・大学院共生科学技術
研究部・教授
研究者番号：30117717
(2008年度以降は連携研究者)

伊師 英之 (ISHI HIDEYUKI)
名古屋大学・大学院多元数理科学
研究科・准教授
研究者番号：00326068
(2008年度以降は連携研究者)

示野 信一 (SHIMENO NOBUKAZU)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号：60254140
(2007年度に研究分担者となる。
2008年度以降は連携研究者)

(3) 連携研究者

森田 英章 (MORITA HIDEAKI)
室蘭工業大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：90435412
(2009年度に連携研究者となる.)

(4) 研究協力者

平井 武 (HIRAI TAKESHI)
京都大学・名誉教授
研究者番号：70025310