

平成 22 年 5 月 13 日現在

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2006～2009

課題番号：18204009

研究課題名（和文） 微分方程式の粘性解理論とその応用の研究

研究課題名（英文） RESEARCH ON THE THEORY OF VISCOSITY SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ITS APPLICATIONS

研究代表者

石井 仁司（ISHII HITOSHI）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：70102887

研究成果の概要（和文）：微分方程式の粘性解理論とその応用の研究に関して、境界値問題の粘性解、弱 KAM 理論、粘性解の正則性、最適化問題、微分方程式の種々の漸近問題、曲率流や界面の時間発展、質量輸送の問題、工学・経済の問題を研究した。本研究組織のこれまでの研究の蓄積の上に、個々の課題に対して多くの新しい知見を得ることが出来た。特に、弱 KAM 理論におけるオーブリ集合の研究とその漸近問題への応用での貢献は大きい。

研究成果の概要（英文）：On the theme of researching the theory of viscosity solutions of differential equations and its applications, we investigated viscosity solutions of boundary value problems, weak KAM theory, regularity of viscosity solutions, optimizations problems, several kinds of asymptotic problems in differential equations, curvature flows and motions of phase boundaries, mass transportation problems, problems in engineering and economics. Based on the investigations done before, we have succeeded to obtain many, new observations on each of subjects listed above. Our contributions to research on Aubry sets in weak KAM theory and its application to asymptotic problems are significant.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
平成 18 年度	6,300,000	1,890,000	8,190,000
平成 19 年度	5,800,000	1,740,000	7,540,000
平成 20 年度	5,500,000	1,650,000	7,150,000
平成 21 年度	5,500,000	1,650,000	7,150,000
総計	23,100,000	6,930,000	30,030,000

研究分野：偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式、粘性解、ハミルトン・ヤコビ方程式、弱 KAM 理論、曲率流方程式、数理ファイナンス、比較原理

1. 研究開始当初の背景

（1）微分方程式の粘性解の理論は 20 年程の歴史を持ち、その基礎理論はある程度確立しており、最適制御、曲面の曲率流、微分方程式の均質化問題を含む種々の漸近問題への応用において成果を挙げていた。

（2）一方で、理論面における未解決問題の解決と理論の精密化、より広範な応用が期待されていた。

2. 研究の目的

（1）微分方程式の粘性解理論と応用を広範

に進め、粘性解の理論的な課題を探り、種々の応用を図ることを基本的な目的とする。

(2) 次のような個別課題を中心として、研究を進める。①境界値問題に対する粘性解の理論、②弱 KAM 理論、③最適制御と微分ゲームへの応用、④幾何の問題に現れる完全非線形偏微分方程式への応用、⑤均質化理論と大偏差原理を中心とした応用、⑥工学・経済への応用。

3. 研究の方法

(1) 広範な課題を取り扱うために、個別課題を担当するグループを構成し、各グループで研究協力を緊密に行う。このために研究打ち合わせを必要とし、研究費として比較的多額の旅費が必要となる。

(2) 海外における本研究分野の進展の情報を収集しながら、同時に、海外の研究者の研究協力を求める。このために、海外の研究集会に参加し、情報収集を行う。一方で、このような機会に研究成果の公表を図る。海外の研究機関を訪問し、共同研究などの形で研究協力を求めていく。

(3) 全国規模の研究集会を各年度ごとに 2 回程行い、本分野の研究者と関連分野の研究者の参加を求め、最新の研究成果の情報を集め、研究の進展の方向を探り、同時に研究成果の公表を図る。このような機会に、海外の研究者を招へいし、研究情報の収集を行ない、研究協力を求める。

4. 研究成果

(1) 境界値問題の粘性解理論あるいは粘性解の基本的な性質に関する成果として、以下のものを挙げる。完全非線形一様楕円型および放物型方程式の L_p 粘性解の最大値原理を、1 階偏導関数に関して 1 次以上の増大度のある場合または非有界係数を持つ場合に確立した。さらに、同様な場合に、完全非線形 2 階一様楕円型方程式の L_p 粘性解の弱ハルナック不等式を導き、ヘルダー連続性の評価、リュービル原理、非有界領域での最大値原理などを確立した。この結果を応用して、プラグレム・リンデレフの定理を一般化した。特異拡散方程式から派生した、空間変数に対して不連続なハミルトン・ヤコビ方程式に対して比較定理を証明した。このハミルトニアンの不連続性は今まで扱われていないものである。球対称な係数をもつ半線形楕円型方程式が、係数の無限遠方での増大度や零点の分布状況に対する適当な仮定の下で非球対称解を持つことを示した。この方程式の解の構造を調べるために数値解析を行い、いくつかの知見を得た。非線形特異積分方程式に対するディリクレ問題に粘性解を導入し、一意可解性を確立し、この問題の特異極限として p ラプラス方程式が現れることを示した。

(2) 弱 KAM 理論については、ハミルトン・ヤコビ方程式の解の時間無限大での漸近挙動という観点に重点をおいて研究を進めた。周期性の仮定の下で、これまでに得られていた解の漸近解への収束の結果を、ハミルトニアンと初期関数が必ずしも周期的でない場合に、半周期的あるいは半概周期的という仮定の下でも成立することを示した。さらに、空間 1 次元全空間の場合について、解の漸近解への収束という観点からの分類を行い、一般次元の場合に、全空間での漸近解への収束のための一般的条件を、オーブリ・マザー集合、極軌道、解の表現定理などに基づいて記述し、その有用性を検証した。ハミルトン・ヤコビ方程式の解の漸近解への収束率に関して、収束率が初期値とオーブリ・マザー集合の関係に依ることを具体例で明示的に示した。時間無限大での漸近解への収束率の遅延要因をオーブリ・マザー集合との関連で調べた。また、時間に関して陽に依存しないハミルトン・ヤコビ方程式の解のオーブリ・マザー集合上における定常性を発見した。弱 KAM 理論に対する一般的な観点から、ハミルトン・ヤコビ方程式の極小一意性集合の特徴づけを行い、その性質を明らかにした。ハミルトン・ヤコビ方程式に対する一般ディリクレ問題の解の表現定理を理想境界を導入して確立した。片側制限条件をもつ仮似変分不等式系について、オーブリ・マザー集合に関するある条件を満たすハミルトニアンを持つ場合に、粘性解の比較定理と表示公式を与えた。陰的な障害物条件をもつハミルトン・ヤコビ方程式系について粘性解の比較定理を得た。さらに、制限条件をもつハミルトン・ヤコビ型変分不等式に対する解の表現定理を得た。ノイマン型境界条件付きのハミルトン・ヤコビ方程式に対するオーブリ・マザー集合の定義、オーブリ・マザー集合に基づく解の表現公式の確立、対応した最適制御問題の状態方程式であるスコロホッド問題の可解性などの成果を得た。

(3) 本課題で扱っている方程式の多くは最適制御・微分ゲームに関連しているが、特に最適制御に関する成果として、与えられた 1 次元周辺分布を持つ確率過程を確率最適制御問題の双対定理を示す事により構成した。特に、時間、確率過程、ドリフトベクトルを同等に扱う事により、新たな手法を提供している。この結果は大偏差理論への応用を持つ。確率制御問題に対する双対定理から新しいクラスの汎関数方程式を導出した。これにより周辺分布が固定された場合の確率最適制御問題が統一的に取り扱えることを示した。確率最小作用の原理のゼロ雑音極限として現れる最適輸送問題の最小解や最大解を用いて、ある種の最大従属確率変数列の列の結合分布関数の最大値と最大解、及び最小値と

最小解を求めた。ノーテ・ローゼンブラットの再配分の確率過程版をノーテ・ローゼンブラット過程と定義し、ノーテ・ローゼンブラット過程の存在と一意性、双対定理、ある種の極限定理による特徴付けを与えた。線形・2次最適制御の最適制御問題に対応する非線形変分不等式を導き、その解の高次の微分可能性を証明し、それによって最適ポリシーを構成した。

(4) 幾何の問題に対する応用に関連する成果として次が挙げられる。結晶成長の安定性に関して、円柱状の結晶の平らな面が崩れていくような解を結晶の外の過飽和度が既知として構成した。グラフで表される曲面の非等方な曲率流方程式を含む非線形放物型方程式の粘性劣解と粘性優解に対する強比較原理を確立した。結晶成長における平らな面(ファセット)の安定性を記述すると考えられている、特異拡散方程式およびハミルトン・ヤコビ方程式についての解のファセットが分裂していくことが捉えられる具体的な解を構成した。平面上の有界領域内における渦巻き状曲線の曲率運動について、等高線法アプローチにおける一意性及び初期関数の構成法を確立した。外力のついた平均曲率流をアレン・カーン方程式で近似した際の収束の速さについて最良評価を導いた。曲率流に関して、平均曲率と与えられた外力に依存して動く、滑らかでコンパクトな超曲面を外力項をもつアレン・カーン方程式で近似した際の最良誤差評価を導いた。

(5) 微分方程式の均質化理論と大偏差原理を中心とした応用については、弱KAM理論に関する得られた成果はこの応用のための基盤を与える。また、本課題の確率制御に関する成果も大偏差原理に応用を持つ。これらの応用については、今後の課題となる。

(6) 工学・経済への応用としては、つぎのような成果が得られた。非完備な市場モデルである線形ガウス型市場モデルを取り上げ、資産増加率が予め定めた値を超えない確率を最小化する問題の時間大域的挙動が、リスク鋭感的ポートフォリオ最大化問題の双対として特徴付けられることを示した。同じ問題を部分情報下の下でも考察し、類似の結果を得た。また、総資産価値が予め規定した目標値を時間大域的に見て下回る確率を最小化する問題を考察し、この問題が確率制御の標準的な問題とはならず、リスク鋭感的確率制御問題でリスク回避的な場合の問題の双対問題として捉えられるということを示す研究を行った。資産の目標成長率を時間大域的にみて下回る確率を最小化する問題について、その最適戦略はある種のリスク鋭敏型ポートフォリオ最適化問題の最適戦略に他ならないことを、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の解析を通じて示した。アメリ

カン・オプションに現れる放物型変分不等式に対する時間離散近似を研究し、この近似解の誤差評価と近似自由境界の収束を半群理論と粘性解の方法によって得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計75件)

- ① 石井仁司、中村剛、A class of integral equations and approximation of p-Laplace equations、Calc. Var. Partial Differential Equations、査読有、37巻、2010、485-522
- ② 儀我美一、Przemysław Górka、Piotr Rybka、Nonlocal spatially inhomogeneous Hamilton-Jacobi equation with unusual free boundary、Discrete Contin. Dyn. Syst.、査読有、26巻、2010、493-519
- ③ 市原直幸、石井仁司、Long-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex and coercive Hamiltonians、Arch. Ration. Mech. Anal.、査読有、194巻、2009、383-419
- ④ 儀我美一、Piotr Rybka、Facet bending driven by the planar crystalline curvature with a generic nonuniform forcing term、J. Differential Equations、査読有、246巻、2009、2264-2303
- ⑤ 小池茂昭、Andrej Świech、Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients、J. Math. Soc. Japan、査読有、61巻、2009、723-755
- ⑥ 市原直幸、石井仁司、The large-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations on the real line、Methods Appl. Anal.、査読有、15巻、2008、223-242
- ⑦ 市原直幸、石井仁司、Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations with semi-periodic Hamiltonians、Comm. Partial Differential Equations、査読有、33巻、2008、784-807
- ⑧ 石井仁司、Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean n space、Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire、査読有、25巻、2008、231-266
- ⑨ 三上敏夫、Michèle Thieullen、Optimal transportation problem by stochastic optimal control、SIAM J. Control Optim.、査読有、47巻、2008、1127-1139
- ⑩ 丸尾健二、山田直記、Existence of

non-radially symmetric viscosity solutions to semilinear degenerate elliptic equations with radially symmetric coefficients in the plane. I, J. Math. Anal. Appl., 査読有、345 巻、2008、743-753

- ⑪ 石井仁司、三竹大寿、Representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians, Indiana Univ. Math. J., 査読有、56 巻、2007、2159-2183
- ⑫ 小池茂昭、Andrej Świech、Maximum principle for fully nonlinear equations via the iterated comparison function method, Math. Ann., 査読有、339 巻、2007、461-484
- ⑬ 石井克幸、Optimal rate of convergence to the motion by mean curvature with a driving force, Adv. Differential Equations, 査読有、12 巻、2007、481-514
- ⑭ 藤田安啓、石井仁司、Paola Loreti、Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean n space, Indiana Univ. Math. J., 査読有、55 巻、2006、1671-1700
- ⑮ 藤田安啓、石井仁司、Paola Loreti、Asymptotic solutions of viscous Hamilton-Jacobi equations with Ornstein-Uhlenbeck operator, Comm. Partial Differential Equations, 査読有、31 巻、2006、827-848

[学会発表] (計 149 件)

- ① 石井仁司、Weak KAM aspects of Hamilton-Jacobi equations with the Neumann type boundary condition, Joint meeting of the Korean Mathematical Society and the American Mathematical Society, 2009 年 12 月 18 日、Ewha Womans University、ソウル、韓国
- ② 小池茂昭、Weak Harnack inequality for L_p -viscosity solutions of fully nonlinear PDEs with unbounded ingredients, The Second Chile-Japan Workshop on Elliptic and Parabolic Equations, 2009 年 12 月 1 日、明治大学
- ③ 儀我美一、A Microscopic time scale approximation to the behavior of the local slope on the faceted surface under a nonuniforming in supersaturation, Materials Science Group Seminar, 2009 年 9 月 19 日、Courant Institute、ニューヨーク、米国
- ④ 石井克幸、A time-discretization to the American option pricing, The Second International Conference on Reaction-Diffusion systems and

Viscosity solutions, 2009 年 7 月 17 日、Providence University、台中、台湾

- ⑤ 長井英生、Down-side risk minimization as large deviation control, 1st Pacific Rim Mathematical Association (PRIMA) Congress, 2009 年 7 月 6 日、University of New South Wales、シドニー、オーストラリア
- ⑥ 石井仁司、Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations for large time and related topics, 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM07), 2007 年 7 月 19 日、チューリッヒ、スイス
- ⑦ 三上敏夫、Marginal problem for semimartingales via duality, International Conference for the 25th Anniversary of Viscosity Solution, 2007 年 6 月 6 日、東京大学
- ⑧ 石井仁司、Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations, International Congress of Mathematicians, 2006 年 8 月 26 日、マドリッド、スペイン

[図書] (計 3 件)

- ① 儀我美一、Birkhauser Verlag、Surface evolution equations. A level set approach, 2006、264

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石井 仁司 (ISHII HITOSHI)
早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号：70102887

(2) 研究分担者

小林 和夫 (KOBAYASI KAZUO)
早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号：30139589

大谷 光春 (OTANI MITSU HARU)

早稲田大学・理工学術院

研究者番号：30119656

儀我 美一 (GIGA YOSHIKAZU)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：70144110

長井 英生 (NAGI HIDEO)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授

研究者番号：70110848

小池 茂昭 (KOIKE SHIGEAKI)

埼玉大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：90205295

三上 敏夫 (MIKAMI TOSHIO)

広島大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：70229657

山田直記 (YAMADA NAOKI)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：50030789

後藤 俊一 (GOTO SYUN' ICHI)

北海道教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：30225651

石井 克幸 (ISHII KATSUYUKI)

神戸大学・大学院海事科学研究科・准教授

研究者番号：40232227

藤田 安啓 (FUJITA YASUHIRO)

富山大学・大学院理工学研究部 (理学)・
准教授

研究者番号：10209067

大沼 正樹 (OHNUMA MASAKI)

徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アンド・
サイエンス研究部・准教授

研究者番号：90304500