

平成22年4月30日現在

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2006 ～ 2009

課題番号：18204010

研究課題名（和文）生物の形づくりを模する微分方程式の解の定性的性質

研究課題名（英文）Qualitative Properties of Solutions of Differential Equations Modeling Biological Pattern Formation

研究代表者

高木 泉（TAKAGI IZUMI）

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：40154744

研究成果の概要（和文）：生物の形態形成のモデルとして提唱された反応拡散方程式系に対し、パターンの崩壊や解の爆発などの特徴的な動的変化が起きるための条件を明らかにし、また解の最大点の位置や漸近形などの定性的性質を解明した。

さらに、赤血球膜の形態変換モデルである幾何学的変分問題の低次元類推問題として、曲げエネルギーにより駆動される平面閉曲線のエネルギー汎関数に対し、その臨界点をすべて求めるとともに、拘束条件をみたす勾配流の構成など動力学的性質を考察するための理論的枠組みを構築した。

研究成果の概要（英文）：Collapse of patterns is a newly found phenomenon characteristic to some reaction-diffusion systems possessing singular nonlinearities, where patterns are formed at first but eventually converge to a nonregular steady state. We have given sufficient conditions for patterns to collapse and also for solutions to blow-up in finite time. In addition, qualitative properties of solutions such as the dynamics of maximum points and/or asymptotic forms of solutions have been studied in detail.

Moreover, movement of planar closed curves driven by bending energy is considered as a lower dimensional analogue for the geometric variational problem which determines the shape of red blood cells. All the critical points of the energy functional under some constraints are found and the gradient flow of the constraint minimization problem has been constructed.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	10,800,000	3,240,000	14,040,000
2007年度	8,900,000	2,670,000	11,570,000
2008年度	8,600,000	2,580,000	11,180,000
2009年度	8,200,000	2,460,000	10,660,000
年度			
総計	36,500,000	10,950,000	47,450,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：反応拡散方程式，活性因子－抑制因子系，進行波解，非一様な媒質，幾何学的変分問題，曲線の運動

1. 研究開始当初の背景

生命現象は様々な要素からなる非常に複雑なものであるが、なかでも、発生過程の形態形成は、殆ど一様な状態から出発して次第に空間的な構造が複雑化して行く極めて動的なものである。しかも、これらの過程が外部から何らかの制御を受けて行われるのではなく、内在的な制御機構に基づいて展開される。およそ60年前、Alan M. Turing は、ある種の化学物質が「拡散誘導不安定化」の原理によって濃度分布の不均一性、すなわち、パターンを自律的に形成し、そのパターンが形態形成を制御しているという画期的なアイデアを提出した。それに触発されて様々な数理モデルが提唱され、今日では、反応拡散方程式系という一つのカテゴリーを形成するまでになった。そこには、初期一境界値問題の適切性（解の存在と一意性、初期値や境界値についての連続性）という最も基本的な問題の他に、解の「形状」という定性的性質を研究対象とする新しい問題意識も込められている。実際、1970年代から80年代にかけて、反応拡散方程式系は、比較的単純な非線型性にも拘らず、その解集合は非常に豊かな構造をもつことが明らかにされ、その解明のための数学的手法が編み出されていった。本研究開始当初までに、一様な媒質における二成分反応拡散系の定常解や進行波解というパターンの基本的要素の構成法およびその安定性の判定法に関する理論は完成の域に達し、非一様な媒質におけるパターン形成あるいは三成分系の研究が本格化しようとしていた。

2. 研究の目的

本研究は、次の三点を主な目的として実施された。(i) 拡散誘導不安定化にもとづいて提唱された様々な反応拡散方程式系が生成するパターンの多様性とパターンの動的変化を探究し、数学的に厳密な解析を行うこと、(ii) 赤血球膜のなす両凹形閉曲面などにみられる曲面の形状を決定する幾何学的変分問題とその動力学の数学的理論を構築すること、および (iii) 反応拡散系によって形成されるパターンに従って曲面が変形する過程を解析すること。

3. 研究の方法

上記目的達成のため、概ね以下のようなグループに分かれて研究課題を分担して行った：

[A] 解の集中現象や爆発現象に典型的に見られる解の定性的性質を解析する手段の開発・整備、[B] 空間の非一様性が反応拡

散系のパターン形成に与える影響の解明、[C] 曲げエネルギーを極小にする閉曲面、閉曲線の形状とその変形問題の解の構造、[D] 反応拡散系によって制御された曲面の運動、[E] 具体的に生物の形態形成のモデルとして提唱された反応拡散系の解と実験結果との対比によるモデルの評価。

- ・非線型放物型偏微分方程式の解の爆発現象 [A]: 小川卓克, 石毛和弘, 柳田英二
- ・反応拡散系の定常解の構造 [B]: 高木 泉, 中島主恵, 柳田英二
- ・反応拡散系の解の動的性質 [B]: 高木 泉, 上山大信, *鈴木香奈子
- ・反応拡散系の進行波解の構造 [B]: 飯田雅人, 池田榮雄
- ・幾何学的変分問題 [C]: 長澤壯之, 岡部真也, 堀畑和弘
- ・反応拡散系によって制御された曲面の運動 [D]: 望月敦史, 高木 泉, 山田澄生
- ・反応拡散系による形態形成モデルの評価 [E]: 高木 泉, 上山大信, *中山まどか (*印は研究協力者)

研究者間の情報交換と討議の場として「盛岡応用数学小研究集会」、「北東数学解析研究集会」を毎年開催し、また、パターン形成の理論を中心に最新の研究動向の概説をする「非線型数理レクチャーシリーズ」を毎年数回開催した。さらに、若手研究者のための勉強会として「秋の学校」、「杜の学校」を開催し、この方面の研究の最前線を知るうえでの準備を提供した。

4. 研究成果

反応拡散方程式(系)に対する結果として特筆すべきことは、第1に、パターンの崩壊について数学的に厳密な証明を与えたことである。パターンの崩壊とは殆ど一様な状態から一旦は空間的なパターンを形成するが、その後振動を始め、終にはパターンが消滅してしまうことをいう。そのようなことが起こるための、非線型項や基礎生産項に対する条件を明らかにした。第2に、半線型放物型偏微分方程式の解の形状(解の最大点の挙動、解の等高面の構造など)に関する研究で、等高面の凸性が崩れる例を構成するなどの新しい知見を得た。また、与えられた曲線上を運動する特異点をもつ解の構成を行うなど、爆発問題に対しても大きく貢献することができた。さらに、曲げエネルギーを極小化する平面内の閉曲線に対する幾何学的変分問題の臨界点をすべて求め、また、拘束条件を実現する勾配流を構成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 86 件)

(1) T. Ogawa, S. Shimizu, End-point maximal regularity and wellposedness of the two dimensional Keller–Segel system in a critical Besov space, Math. Z., 264 (2010), 601–628, 査読有

(2) Kanako Suzuki and Izumi Takagi, Behavior of Solutions to an activator-inhibitor system with basic production terms, Proceedings of the Czech–Japanese Seminar in Applied Mathematics 2008 held at Takachiho/University of Miyazaki, Miyazaki, Japan, September 1–7, 2008, pp49–59. 2009年2月, 査読有

(3) S. Sato and E. Yanagida, Solutions with moving singularities for a semilinear parabolic equation, J. Differential Equations 246 (2009), 724–748, 査読有

(4) Y. Miyamoto and T. Nagasawa, F. Suto, How to unify the total/local-length-constraints of the gradient flow for the bending energy of plane curves, Kybernetika 45 (4), (2009) 615–624, 査読有

(5) I. Lagzi and D. Ueyama, Pattern transition between periodic Liesegang pattern and crystal growth regime in reaction-diffusion systems, Chemical Physics Letters 468 (2009), pp. 188–192. 査読有

(6) Seiju Ohashi, Tetsuya Shiromizu and Sumio Yamada, Riemannian Penrose inequality and a virtual gravitational collapse. Physical Review D 80 (2009) 047501.1–047501.4, 査読有

(7) Kohtaro Watanabe and Izumi Takagi, Representation formula for the critical points of the Tadjbakhsh Odeh functional and its application, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 25(2008), 331–372, 査読有

(8) M. Fila, M. Winkler and E. Yanagida, Slow convergence to zero for a parabolic equation with supercritical nonlinearity, Math. Annal. 340, No. 3 March (2008), 477–496, 査読有

(9) S-I. Ei, H. Ikeda, T. Kawana, Dynamics of front solutions in a specific reaction-diffusion system in one dimension, Japan J. Indust. Appl. Math. 25 (2008), no. 1, 117–147, 査読有

(10) S. Okabe, The dynamics of an elastic closed curve under uniform high pressure, Calc. Var. Partial Differential Equations, 33, no. 4 (2008), 493–521, 査読有

(11) D. Hilhorst, M. Iida, M. Mimura and H. Ninomiya, Relative compactness in L^p of solutions of some 2m components competition-diffusion systems,

- Discrete and Continuous Dynamical Systems, 査読有, Vol. 21 No. 1, 2008. 5, 233-244
- (12) T. Ogawa, S. Shimizu,
The drift-diffusion system in two dimensional critical Hardy space, J. Funct. Anal., (2008), 1107-1138 査読有
- (13) Fang Li, Kimie Nakashima and Wei-Ming Ni, Stability from the point of view of diffusion, relaxation and spatial inhomogeneity, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, 20(2008) 259-274, 査読有
- (14) Kanako Suzuki, Izumi Takagi, On the role of the source terms in an activator-inhibitor system proposed by Gierer-Meinhardt, Advanced Studies in Pure Mathematics, Asymptotic Analysis and Singularities 42(2007), 749-766, 査読有
- (15) H. Ikeda, Dynamics of weakly interacting front and back waves in three-component systems, Toyama Math. J., 30(2007), 1-34, 査読有
- (16) S. Okabe, The motion of elastic planar closed curves under the area-preserving condition, Indiana Univ. Math. J., no. 4 (2007), 1871-1912, 査読有
- (17) Kazuhiro Ishige, Movement of hot spots on the exterior domain of a ball under the Dirichlet boundary condition, Adv. Differential Equations 12 (2007), 1135-1166, 査読有
- (18) Y. Du, K. Nakashima, Morse index of layered solutions to the heterogeneous Allen-Cahn equation, Journal of Differential Equations, 238 (2007) 87-117, 査読有
- (19) Ishihara, S., Otsuji, M. and Mochizuki, A. (2007) **Transient and steady state of mass-conserved reaction-diffusion systems.** Phys. Rev. E **75** (1), (2007) 015203, 査読有
- (20) Wei-Ming Ni, Kanako Suzuki and Izumi Takagi, The dynamics of a kinetic activator-inhibitor system, J. Differential Equations 229(2006), 426-465, 査読有
- [学会発表] (計 249 件)
- (1) Izumi Takagi
“Pattern formation on surfaces -from a biological point of views”, The 5th Geometry Conference for Friendship of Japan and China, Okinawa Institute of Science and Technology, Okinawa, 2010 年 1 月 29 日.
- (2) Izumi Takagi
“Movement of planar closed curves driven by bending energy”, 第 26 回九州における偏微分方程式研究集会, 九州大学箱崎キャンパス国際ホール, 2009 年 1 月 27 日
- (3) E. Yanagida

Solutions with moving singularities for a semilinear parabolic equation
Topological and Variational Methods for Partial Differential Equations
(May 18, 2009, at Oberwolfach, Germany)

(4) T. Nagasawa

Constrained gradient flows of bending energy for plane curves: Total-length constraint versus local-length constraint, 国際研究集会「Variational Problems for Curves and Surfaces and Related Topics」, 奈良女子大学, 2009年7月2日.

(5) Izumi Takagi

“On the effect of basic production terms on the dynamics of some activator-inhibitor systems”, 2nd International Conference on Reaction-Diffusion Systems and Viscosity Solutions, Providence University, Taichung, 2009年7月15日

(6) 池田榮雄, Dynamics of traveling front waves in bistable heterogeneous media, Equadiff 12, 2009年7月20日-24日, Masaryk University, Brno, Czech Republic

(7) 飯田雅人

反応拡散系の急速反応極限によって見えるもの, 大阪大学, 2009. 9. 26
日本数学会秋季総合分科会特別講演[函数方程式論分科会]

(8) T. Ogawa

Drift-diffusion system in two dimensional critical Hardy space, Navier-Stokes equations and related

topics,

KOSEF-JSPS Joint Research and Seminar Project, Jan. 14-15, 2008, Sungkyonkwan Univ., Suwon, Korea.

(9) 山田澄生

“A variational formulation for free boundary regularity of singular minimal surfaces” 研究集会「変分法とその周辺」京都大学数理解析研究所 2008年6月25日.

(10) A. Mochizuki

“Dynamical analysis of structure of gene regulatory networks” (Invited)
Annual Meeting of The Japanese Society for Mathematical Biology September 16-18, 2008, Doshisha University, Kyoto, Japan

(11) 上山大信

A simulation study of pattern transition in a precipitation system, The Japan-France International Laboratory (LIA-197) ReaDiLab “Mathematical Understanding of Complex Systems arising in Biology and Medicine”, 2008.10.27-29, 明治大学駿河台キャンパス紫紺館

(12) 上山大信

A simulation study of pattern transition in a precipitation system, PDE approximations in Fast reaction - Slow diffusion scenarios, from 10 Nov 2008 through 14 Nov 2008, Lorentz Center, Netherlands

(13) 山田澄生

“On existence and regularity of

singular minimal surfaces” 2007
International Conference on
Geometric Analysis 招待講演
National Taiwan University, Taiwan,
2006年6月22日

- (14)石毛和弘,
熱方程式の解の最大点挙動について,
非線形数理 冬の学校「発展方程式系の解の
挙動」 --反応拡散方程式理論の最先端
---(東京工業大学), 2006年12月14日

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://morpho.sci.tohoku.ac.jp/~morpho/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高木 泉 (Takagi Izumi)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 40154744

(2) 研究分担者

柳田 英二 (Yanagida Eiji)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80174548

池田 榮雄 (Ikeda Hideo)
富山大学・大学院理工学研究部・教授
研究者番号: 60115128

長澤 壯之 (Nagasawa Takeyuki)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 70202223

(3) 連携研究者

飯田 雅人 (Iida Masato)
宮崎大学・工学部・教授
研究者番号: 00242264

石毛 和弘 (Ishige Kazuhiro)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90272020

上山 大信 (Ueyama Daishin)
明治大学・理工学部・准教授
研究者番号: 20304389

小川 卓克 (Ogawa Takayoshi)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 20224107

望月 敦史 (Mochizuki Atsushi)
理化学研究所・基礎研究所・主任研究員
研究者番号: 10304726

山田 澄生 (Yamada Sumio)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90396416