

平成 22 年 5 月 28 日現在

研究種目：基盤研究 (B)  
 研究期間：2006～2009  
 課題番号：18300003  
 研究課題名 (和文) 一般化エントロピーの数理による、ベキ分布にしたがうデータの  
 情報生成構造の解明  
 研究課題名 (英文) Elucidation of information structure exhibiting power-law  
 distribution in the mathematical framework of generalized entropies  
 研究代表者  
 須鎗 弘樹 (SUYARI HIROKI)  
 千葉大学・大学院融合科学研究科・准教授  
 研究者番号：70246685

## 研究成果の概要 (和文)：

確率論を基礎にして、従来の統計力学・情報理論の中心的な概念はエントロピーにあり、その理論的枠組みは、統計的独立性と指数関数族の数理であった。その一般化として、一般化エントロピーが考えられ、スケーリング則をもつ従属性と一般化指数関数の数理を明らかにした。特に、代数構造・幾何構造などを中心に、これまでの数理にない関係性が現れ、これら構造から、ベキ分布にしたがうデータが生成されることが明らかになった。

## 研究成果の概要 (英文)：

The fundamental quantity in statistical mechanics and information theory based on the probability theory is “entropy”, where the underlying mathematical structure is “stochastic independence and exponential family”. As its generalization, we elucidate “scaling dependence and generalized exponential family” through some generalized entropies. In particular, the novel algebraic and geometric structures are revealed through our studies, which is found to generate power-law distribution.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	3,900,000	1,170,000	5,070,000
2007 年度	3,300,000	990,000	4,290,000
2008 年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2009 年度	3,100,000	930,000	4,030,000
年度			
総計	13,200,000	3,960,000	17,160,000

## 研究分野：情報数理

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：一般化エントロピー，一般化指数関数，ベキ分布，スケーリング則，Tsallis エントロピー，情報幾何

## 1. 研究開始当初の背景

従来、カオス・フラクタルなどの分野では、スケールをもたない特徴的な分布（自己相似な分布）として、ベキ分布が観測されてきた。しかし、これらの分野に限らず、我々の身の

回りのネットワークにおいても、ベキ分布が特徴的な分布として、着目されている。実際、ネイチャー・サイエンスなどの有名雑誌などでも、よく取り上げられているが、インターネット・遺伝子ネットワークなどの我々の身

の回りの様々なネットワークにおいても、指数関数型ではなく、ベキ分布にしたがう分布が特徴的な分布として観測されている。指数関数族の数理は、確率論を基礎にして、統計力学・情報理論などを中心に発展していた。そこでは、エントロピーが中心的な概念である。そこで、ベキ関数族の数理を構築することを目的にして、一般化エントロピーの数理を中心にすれば、その目的が達成されるのではないかと考えた。実際、1988年から研究が進められていた Tsallis 統計力学が統計力学の分野で一定の成果を収め、さらに、その新しい数理が研究組織のメンバーを中心に2004 頃に明らかになったことが、そのような着想の大きなきっかけであった。

## 2. 研究の目的

我々の身の回りで観測されるデータがしたがう分布は、指数関数型とベキ関数型に大別される。前者の指数関数型の分布については、従来の確率論・情報理論・統計力学などについては、堅固な数理がすでに存在しているが、ベキ関数型の分布については、部分的に多くの試みがあるものの、指数関数型ほど、統一的な扱いは、未だ存在していない。本研究では、我々研究組織の近年の結果を背景にして、一般化エントロピーによって、ベキ関数にしたがうデータが発生するしくみの解明を目指した。実際、指数関数型の分布にしたがうデータの発生機構については、シャノンエントロピーを用いて、情報理論・統計力学において、統一的に記述されている。そのことから、一般化エントロピーが、ベキ分布の発生機構の解明に重要な役割を演じると十分に考えられる。

## 3. 研究の方法

(1) シャノンエントロピーの一意性を示すシャノン-ヒンチンの公理系を拡張し、すでに得られているツァリスエントロピーの公理系の結果をもとに、 $\kappa$ -エントロピーの公理系・Sharma-Taneja-Mittal エントロピーの公理系を同様の方法で見つける。

(2) 一般化エントロピーの情報論的な意味、特に、情報源符号化定理がどのように拡張されるのかを明らかにし、一般化エントロピーを平均符号長の下限にもつ符号木の数理構造・性質について調べる。

(3) 一般化エントロピーと拡張された多項係数との一意な対応関係から、その背後にある数理構造を明らかにする。

(4) 一般化エントロピーから導かれる新しい代数による特殊関数などの拡張を行う。

(5) 一般化エントロピーに対する非線形時間発展方程式の漸近解について、その情報幾何の構造をとらえる。

(6) Tsallis統計力学なども特別な場合として含むsuperstatisticsにより、従来の数理構造が、統計力学あるいは情報数理の観点から、いかに拡張されるのか明らかにする。

(7) 一般化エントロピーとマルチフラクタルに現れる一般化次元との関係を明らかにする。

(8) マルチスケールコントロール集合とロジスティック写像との関係から、一般化エントロピーとカオスとの関係を明らかにする。

(9) 漸近的なベキ分布を生じる機構としてのGaussの誤差法則の一般化に関して、一般化した最尤関数に基づく最尤法とBregmanダイバージェンスの関係を明らかにする。

(10) 量子系における一般化エントロピーの性質はしばしばある種のトレース不等式を用いて解明できることが多い。そこで、種々のトレース不等式を様々な角度から追求しその数理的側面からのアプローチを行う。

(11) 行列解析の立場から、密度行列に対して定義されるTsallis相対エントロピーの応用として、非加法的統計力学におけるエントロピー最大化原理について考察し、Tsallis相対エントロピーに関連したトレース不等式について研究する。

(12) 非加法的統計力学におけるFisher情報量を導入し、Tsallisエントロピーの最大化で得られるq-Gauss分布がFisher情報量を最小化するかどうかについて調べる。

(13) Tsallisエントロピーを一意に定める一般化Shannon-Khinchinの公理系をなす公理を連続系に拡張することにより、連続系のTsallisエントロピー・Tsallis相対エントロピーを導く。

(14) 最尤法であるGaussの誤差法則の一般化と、一般化エントロピー最大原理との関連に基づいたベキ分布導出法を確立する。

(15) 定常分布が漸近的ベキ分布である、非線形項を持つFokker-Planck方程式のリアプノフ汎関数の時間発展に基づいた一般化エントロピー最大原理の数理を明らかにする。

(16) 一般化された skew information の満たす不確定性関係を表す不等式を様々な角度から追求する。

(17) 一経数拡張されたFisher情報量を最小化するq-Gaussian分布の特性を調べる。

(18) 本研究計画の最終年度の集大成として、国際 Workshop を開催する。一般化エントロピーに関連する国内外の著名な数理研究者を招待し、一般講演と合わせて、この分野の研究の成果について議論を深める。

#### 4. 研究成果

- (1) Tsallis エントロピーが、スケールフリーな解をもつ基本的な非線形微分方程式から一意に導かれることを示した. 具体的には、 $q$ -指数関数を解にもつ単純な非線形微分方程式を解くと、その解がスケールフリー性を持つことが容易に示される. このことを出発点として、 $q$ -指数関数が  $q$ -指数法則を満たすように  $q$ -積が導入され、 $q$ -積を用いて、 $q$ -スターリングの公式・ $q$ -多項係数の定式化を行い、これらの具体的な定式化を用いれば、Tsallis エントロピーが一意に導かれることを示した.
- (2)  $q$ -多項係数から、Tsallis エントロピーの公理系の一つをなす一般化 Shannon 加法性が導かれることを示した. さらに、この一般化 Shannon 加法性が、Jackson の  $q$ -微分演算子の Leibniz product rule の直接的な帰結であることも示した.
- (3) Tsallis エントロピーの最大化原理より、従来まで、self-referential な解しか知られていなかったが、それを改良し、self-referential ではなく explicit な解を導いた. その結果から導かれる温度は、従来、別の方法で導かれていた物理的温度と完全に一致することを示した.
- (4) Tsallis エントロピーを特別な場合として含む 1 パラメータ拡張エントロピーの最大化原理について、その導出過程を、離散ならびに連続の両方の場合に、数学的に厳密に示した.
- (5) Tsallis エントロピーを平均符号長の下限にもつ符号木を導いた.
- (6)  $q$ -多項係数を拡張した一般化多項係数と Tsallis エントロピーの間の一意な関係を導き、その特別な場合として、Tsallis 統計力学の代表的な 4 つの数理構造が現れることを示した.
- (7) Tsallis エントロピーの数理である  $q$ -積からガンマ関数の一般化を行った.
- (8) 古典系における一般化 Faddeev の公理系を利用して、量子 Tsallis エントロピーの一意性定理の証明した. また、量子 Tsallis エントロピーが von Neumann エントロピーの拡張であることに着目し、Fannes の不等式を一般化し量子 Tsallis エントロピーの連続性を示した.
- (9) Tsallis エントロピーとは異なるタイプの 1 パラメータ拡張である  $\kappa$  エントロピーの最大原理を基礎づける非線型 Fokker-Planck 方程式を求め、その自己相似解の時間発展を特徴づける Lyapunov 関数と Bregman ダイバー

ジェンスとの関係を明らかにした.

(10) quantum Tsallis entropy の連続性を保証するある種の不等式を求めた. これは Fannes' s inequality の拡張でもある.

(11) MA(1) stationary Gaussian channel の容量が KIM によって求められたが、これを用いて容量に関する種々の不等式が成り立つかどうかの検証を行った.

(12) 一般化エントロピーに関連するベキ則分布に従う複雑系の熱統計力学の基礎的研究およびその地震活動解析への応用について研究した. Superstatistics を条件付き概念量に基づいて定式化し、温度揺らぎの理論的計算を可能にした. また、一般化エントロピーに関する最大エントロピー原理が熱力学的法則と無矛盾であることを証明した.

(13) Shannon エントロピー、Tsallis エントロピーを含む一般化されたエントロピーについて変分不等式を用いてエントロピーを最大にする分布の特徴付けを行ない、Gauss 分布や Tsallis 分布を導出し、従来からある Lagrange 未定乗数法による議論を精密化した. 特に、Tsallis 分布についてはカットオフを用いた数学的にはあいまいな議論を修正した. 更に、非可換(量子)確率論の枠組みでも議論した.

(14) Tsallis エントロピーを平均符号長の下限にもつ符号木とマルチフラクタルから生成される木構造の関係を明らかにし、Tsallis エントロピーに含まれるパラメータ  $q$  が、マルチフラクタルを特徴付ける一般化次元  $D_q$  の  $q$  と同一であることを示した.

(15) Tsallis エントロピーなどを特別な場合として含む Sharma-Mittal-Taneja エントロピーに基づいて、Gauss の誤差法則の 2 パラメータ拡張を行った.

(16) 漸近的なベキ分布を導く Gauss の誤差法則において、最尤関数を一般化することと算術平均を一般化することが等価であることを、最も一般的な場合において示した.

(17)  $\kappa$  エントロピーに関する非線型拡散方程式および Fokker-Planck 方程式の漸近解が、ベキ分布を持つ  $\kappa$ -Gauss 型分布に収束することを数値解析により明らかにした.

(18) 量子系における一般化エントロピーの性質とある種のトレース不等式の関係から、一般化された skew information の満たす不確定性関係を表す不等式とそれらトレース不等式が成り立つことの厳密な証明を与えた.

- (19) Tsallis統計の下で, Fisher情報量を定義し, クラメール・ラオの不等式を証明した.
- (20) 凸集合に関する最短距離定理, 分離定理, 二者択一定理などを, エントロピー最大化原理によって特徴付けた.
- (21) 一般化Shannon加法性から, 連続系のTsallisエントロピー・Tsallis相対エントロピーを導かれることを示した.
- (22) 二経数拡張された対数尤度関数と対応するBregmanダイバージェンスとの間に成立する関係式を導出し, それらが良く知られた対数尤度とKLダイバージェンスとの関係の一般化であることを示した.
- (23) 数値解析および時間依存型の変換に基づく議論を通じて,  $\kappa$ エントロピーに関する非線型拡散方程式の漸近解が $\kappa$ -Gauss型分布であることを明らかにした.
- (24)  $q$ -Gauss分布族の多様体についての情報幾何構造と一般化統計物理との対応に基づき, 多孔質媒質中の流体輸送方程式(PME)の解の性質を明らかにした.
- (25) 一般化された skew information の満たす不確定性関係を表す不等式について, Luoによって示されたWigner-Yanase skew information に関係した不確定性関係を1パラメータ拡張し, Liらの論文では不成功に終わっていた不確定性関係を修正することができた.
- (26)  $q$ -Fisher情報量の定義として,  $q$ -期待値と正規化された $q$ -期待値を用いた2通りの場合について, ある特定の $q$ -分散のときの $q$ -Gaussian分布のときに $q$ -Fisher情報量を最小化することを証明した.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 62 件)

- ① H. Suyari, Maximization of Tsallis entropy in the combinatorial formulation, J. Physics: Conf. Ser., 査読有, vol. 201, 012018(8頁) (2010).
- ② A. Ohara, T. Wada, Information geometry of  $q$ -Gaussian densities and behaviors of solutions to related diffusion equations, J. Phys. A: Math. Theor., 査読有, vol. 43, 035002(18頁) (2010).
- ③ K. Yanagi, Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information, J.

Math. Anal. and Appli., 査読有, vol. 365, 12-18 (2010).

- ④ S. Furuichi, On generalized Fisher informations and Cremer-Rao type inequalities, J. Physics: Conf. Ser., 査読有, vol. 201, 012016(5頁) (2010).
- ⑤ T. Wada, A.M. Scarfone, Asymptotic solutions of a nonlinear diffusive equation in the framework of  $\kappa$ -generalized statistical mechanics, Euro. Phys. J. B, 査読有, vol. 70, 65-71 (2009).
- ⑥ T. Wada, Generalized log-likelihood functions and Bregman divergences, J. Math. Phys., 査読有, vol. 50, 113301(7頁) (2009).
- ⑦ S. Furuichi, K. Kuriyama, K. Yanagi, Trace inequalities for products of matrices, Lin. Alg. and its Appli., 査読有, vol. 430, 2271-2276 (2009).
- ⑧ H. Suyari, M. Tsukada, Tsallis differential entropy and divergences derived from the generalized Shannon-Khinchin axioms, Proc. 2009 IEEE Int. Symp. on Inf. Theory (2009 IEEE-ISIT), 査読有, vol. 2009, 149-153 (2009).
- ⑨ 須鎗弘樹, Tsallis 統計の基礎数理, 数理物理 Summer School 2009 予稿集, 査読無, vol. 2009, 90-123 (2009).
- ⑩ A.M. Scarfone, H. Suyari, T. Wada, Gauss' law of error revisited in the framework of Sharma-Taneja-Mittal information measure, Cent. Eur. J. Phys, 査読有, vol. 7, pp. 4045-420 (2009).
- ⑪ S. Furuichi, K. Yanagi, K. Kuriyama, Trace inequalities on a generalized Wigner-Yanase skew information, J. Math. Anal. and Appli., 査読有, vol. 356, 179-185 (2009).
- ⑫ K. Yanagi, N. Yamashita, On an inequality of capacity of MA(1) Gaussian channel with feedback, Applied Math. and Inf. Sci., 査読有, vol. 3, 13-23 (2009).
- ⑬ S. Furuichi, On the maximum entropy principle and the minimization of the Fisher information in Tsallis statistics, J. Math. Phys., 査読有, vol. 50, 013303(12頁) (2009).
- ⑭ 須鎗弘樹, Tsallis 統計力学の背景と新展開, 日本物理学会誌, 査読無, vol. 63, 450-454 (2008).
- ⑮ 須鎗弘樹, エントロピーの公理的定式化から複雑系の理論へ(招待論文), 電子情報通信学会技術報告(信学技報) 情報理論, 査

読無, vol.IT2008-40, 7-12 (2008).

⑮ R.K. Niven, H. Suyari, Combinatorial Basis and non-asymptotic form of the Tsallis entropy function, Eur. Phys. J. B, 査読有, vol.61, 75-82 (2008).

⑯ H. Suyari, T. Wada, Multiplicative duality,  $q$ -triplet and  $(\mu, \nu, q)$ -relation derived from the one-to-one correspondence between the  $(\mu, \nu)$ -multinomial coefficient and Tsallis entropy  $S_q$ , Physica A, 査読有, vol.387, 71-83 (2008).

⑰ T. Wada, H. Suyari, A two-parameter generalization of Shannon-Khinchin axioms and the uniqueness theorem, Phys.Let.A, 査読有, vol.368, 199-205 (2007).

⑱ H. Suyari, Tsallis entropy as a lower bound of average description length for the  $q$ -generalized code tree, Proc. 2007 IEEE Int. Symp. on Inf. Theory (2007IEEE-ISIT), 査読有, vol.2009, 149-153 (2007).

⑲ S. Furuichi, K. Yanagi, K. Kuriyama, A generalized Fannes' inequality, J. Inequal. in Pure and Applied Math., 査読有, vol.8, 1-6 (2007).

⑳ H. Suyari, Mathematical structure derived from the  $q$ -multinomial coefficient in Tsallis statistics, Physica A, 査読有, vol.368, 63-82 (2006). 他 42 件

[学会発表] (計 56 件)

① H. Suyari, M. Tsukada, Tsallis differential entropy and divergences derived from the generalized Shannon-Khinchin axioms, 2009 IEEE Int. Symp. on Inf. Theory (ISIT2009), 2009年6月29日, ソウル (韓国) .

② T. Wada, A.M. Scarfone, Finite difference and averaging operators in generalized entropies, Kyoto RIMS Workshop "Mathematical Aspects of Generalized Entropies and their Applications, 2009年7月7日, 京都テルサ (京都市) .

③ K. Yanagi, Some inequalities on generalized Wigner-Yanase-Dyson skew information (招待講演), Int. Symp. on Banach and Function Spaces, 2009年9月17日, 九州工業大学 (北九州市) .

④ S. Furuichi, On one-parameter extended Fisher information and Cramér-Rao

inequality, The XVI International Congress on Mathematical Physics, 2009年8月6日, Prague, Czech Republic.

⑤ S. Furuichi, A variational expression for generalized relative entropy, The Second Najman Conf. on Spectral Problems for Operators and Matrices, 2009年5月14日, Dubrovnik, Croatia.

⑥ T. Wada, A nonlinear drift which leads to  $\kappa$ -generalized distributions in Gauss' law of error, Appli. of Phys. in Finan. Anal. 7-th Int.Conf., 2009年3月2日-4日, 東工大 大岡山キャンパス

⑦ K. Yanagi, S. Furuichi, K. Kuriyama, Generalized Wigner-Yanase skew information and generalized Fisher information Int. Symp. on Inf. Theory and its Appl. (ISITA2008), 2008年12月8日, Langham Hotel, Auckland, New Zealand.

⑧ T. Wada, H. Suyari, A generalization of the log-likelihood function and weighted average in Gauss' law of error, Int. Symp. on Inf. Theory and its Appl. (ISITA2008), 2008年12月10日, Langham Hotel, Auckland, New Zealand.

⑨ 須鎗弘樹, エントロピーの公理的定式化から複雑系の理論へ (招待講演), 第31回情報理論とその応用シンポジウム (SITA2008), 2008年10月8日, 鬼怒川温泉あさやホテル, 日光市.

⑩ K. Yanagi, N. Yamashita, On an inequality of capacity of Gaussian channel with MA(1) noise and feedback, Asian Conf. on Nonlin. Anal. and Opt., 2008年9月7日, Kunibiki Messe (松江市).

⑪ S. Furuichi, Matrix trace inequalities on a generalized Wigner-Yanase skew information, Int. Workshop on Operator Theory and Its Appli. (IWOTA2008), 2008年7月22日, Virginia, USA.

⑫ S. Furuichi, K. Kuriyama, K. Yanagi, On trace inequalities for products of matrices, 15th Int. Linear Alg. Society Conf., 2008年6月16日, Cancun, Mexico.

⑬ H. Suyari, Generalized dimension  $D_q$  and Tsallis entropy  $S_q$  derived from the nonlinear differential equation  $dy/dx=y^q$ , Int. Conf. in Stat. Phys. (SigmaPhi2008), 2008年7月17日, Orthodox Academy of Crete, Greece.

⑭ 和田達明, Gauss の誤差法則と Hyper ensembles, 日本物理学会第63回年次大会, 2008年3月25日, 近畿大学理工学部.

⑮ S. Furuichi, K. Yanagi, K. Kuriyama, Wigner-Yanase-Dyson skew information に関する不等式, 日本数学会函数解析学分会, 2007年9月23日, 東北大学.

⑯ 須鎗弘樹, Tsallis エントロピーの数理と一般化符号木, 第5回シャノン理論ワークショップ(STW07), 2007年9月7日, ラフォーレ修善寺(静岡県伊豆市).

⑰ T. Wada, On the non-linear Fokker-Planck equation associated with  $\kappa$ -entropy, Int. Conf. on Complexity, Metastability and Nonextensivity(CT-NEXT07), 2007年7月4日, Catania Univ., Italy.

⑱ H. Suyari, Tsallis entropy as a lower bound of average description length for the q-generalized code tree, 2007 IEEE Int. Symp. on Inf. Theory(ISIT2007), 2007年6月26日, Acropolis Congress and Exhibition Center, Nice, France.

⑲ K. Yanagi, On some properties of generalized skew information, Workshop on Mathematical Analysis and Applications 2007, 2007年6月12日, 九州工業大学.

⑳ H. Suyari and T. Wada, Scaling property and Tsallis entropy derived from a fundamental nonlinear differential equation, Proc. of the 2006 Int. Symp. on Inf. Theory and its Appli. (ISITA2006), 2006年10月30日, ソウル(韓国).

他36件

[図書](計3件)

① 須鎗弘樹, 牧野書店, 複雑系のための基礎数理, 2010, 251.

② H. Suyari, A. Ohara and T. Wada (eds), Mathematical aspects of generalized entropies and their applications (the proceedings of 2009 RIMS conference in Kyoto), JPCS (Journal of Physics: Conference Series), vol.201, 2010.

他1件

[産業財産権]

○出願状況(計0件)

○取得状況(計0件)

[その他]

最終年度(2009年度)に開いた国際ワークショップのサイト

<http://www.icsd3.tj.chiba-u.jp/~rims2009/>

上記のワークショップの proceedings (査読有) のサイト

Journal of Physics: Conference Series (JPCS), vol.201 (2010).

<http://iopscience.iop.org/1742-6596/201/1>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

須鎗 弘樹 (SUYARI HIROKI)

千葉大学・大学院融合科学研究科・准教授

研究者番号: 70246685

### (2) 研究分担者

和田 達明 (TATSUAKI WADA)

茨城大学・工学部・准教授

研究者番号: 00240549

柳 研二郎 (KENJIRO YANAGI)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 90108267

古市 茂 (SHIGERU FURUICHI)

日本大学・文理学部・准教授

研究者番号: 50299327

塚田 真 (MAKOTO TSUKADA)

東邦大学・理学部・教授

研究者番号: 10120198

(2006-2007年度のみ,

2008-2009年度: 連携研究者)

上坂 吉則 (YOSHINORI UESAKA)

山梨英和大学・人間文化学部・教授

研究者番号: 40019782

(2006年度のみ)

阿部 純義 (SUMIYOSHI ABE)

三重大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号: 70184215

(2007年度のみ)

### (3) 連携研究者

小原 敦美 (ATSUMI OHARA)

大阪大学・基礎工学研究科・准教授

研究者番号: 90221168

(2009年度のみ)

Flemming Topsoe

コペンハーゲン大・数学科・名誉教授

(2009年度のみ)

Constantino Tsallis

ブラジル物理学研究センター・教授

(2009年度のみ)