様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月１０日現在

研究種目：基盤研究（Ｂ）
研究期間：2006 ～2008
課題番号：18340001
研究課題名（和文）　混合モティーフ層の理論の発展

研究課題名（英文）　Study of the theory of mixed motivic sheaves

研究代表者
花村　昌樹　(HANAMURA MASAKI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号:　60189587

研究成果の概要：
高次 Chow 群の基礎理論，代数多様体のモティヴィックコホモロジーの具体的計算，混合 Tate モティーフの圏の研究，そして混合モティーフの圏の構成に関連した準 DG 圏の理論の研究をおこなった．高次 Chow 群は Bloch によるが，その定義を別のものに置きかえても基礎理論が証明できることを示した．曲面のモティヴィックコホモロジーの計算をおこなった．混合 Tate モティーフの三角圏の構成と，混合 Tate モティーフのアーベル圏の関係を明らかにした．DG 圏の概念の一般化である準 DG 圏の概念を導入し，準 DG 圏から三角圏を構成する手続きを与えた．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	2,200,000	0	2,200,000
２００７年度	1,700,000	510,000	2,210,000
２００８年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
年度			
総　計	5,600,000	1,020,000	6,620,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：代数多様体，コホモロジー，代数的サイクル，Chow 群

１．研究開始当初の背景

(1) Bloch により高次 Chow 群の基礎理論が確立されていた．代数多様体に対しそのサイクル複体が定義され，そのホモロジーが高次 Chow 群である．これは関手性，K 理論との比較，局所化完全列などをみたすことが示されていた．
その証明の議論は技術的な困難が多かった．たとえば局所化完全系列の証明は技術的であり，実際にそのアイディアを使いにくい．定義を別のもので置き換え，基礎理論の証明を明確にし，理論を使いやすいものにすることが望まれていた．

(2) 代数多様体のモティヴィックコホモロジーの定義はなされていたが，具体的な計算例は多くなかった．定義は，Friedlander,

Suslin, Voevodsky によるものと，代表者によるものがある．
代表者の与えた定義によると，モティヴィックコホモロジーは原理的には，特異点解消を用いて定義される．
特別な多様体の場合にさらに具体的な表示を与えることが望まれた．

(3) 体ｋのうえの混合 Tate モティーフの三角圏の定義と，アーベル圏の定義が別々に存在し，関係が明白でなかった．

三角圏の定義は，Levine, Voevodsky, Hanamura による．またアーベル圏の定義は Bloch-Kriz による．Hanamura による三角圏の定義と，Bloch-Kriz によるアーベル圏の定義は，見かけは大きく異なるが，ともにサイクル複体から出発しているため，比較が望まれた．

(4) 体のうえの混合モティーフの三角圏の構成が花村によりなされていた．ＤＧ圏から三角圏を構成することがその内容の一部であった．

これを混合モティーフ層の三角圏の構成に拡張する際，DG 圏を一般化した quasi DG 圏の概念が現れる．Quasi DG 圏の理論の詳細をまとめること，とくに quasi DG 圏に付随した三角圏の構成をあたえることが課題であった．

２．研究の目的

(1) Bloch の Chow 群の理論はアフィン多様体をモデルにしている．このため技術的な困難が現れると考え，トーリック多様体をモデルとする Chow 群の理論を構成すること目的とする．

(2) 曲面について，そのモティヴィックコホモロジーと，交叉モティヴィックコホモロジーを具体的に計算すること．

(3) 体ｋのうえの混合モティーフの三角圏とアーベル圏の関係を明らかにする．

(4) quasi DG 圏という概念(DG 圏の一般化)を定義し，その基礎理論をまとめること．

３．研究の方法

(1) トーリック多様体をモデルとするサイクル複体の定義を与え，基礎的な性質を示す．とくに局所化完全列(localization sequence)を証明する．

(2) 曲面について，その特異点解消のデータを用いて，モティヴィックコホモロジーの表示を与える．Chow 群も同様な表示ができので，Chow 群とモティヴィックコホモロジーの比較ができる．

(3) 体ｋのうえの混合 Tate モティーフの三角圏のなかで，次数０の対象のなす部分圏を考え，それと混合 Tate モティーフのアーベル圏を比較する．具体的には前者から後者への関手を構成する．

(4) quasi DG 圏なる概念を定義する．
DG 圏においては，対象の対，(X, Y)に対して射のなす複体 F(X, Y)が対応し，さらに合成写像は F(X, Y) と F(Y, Z)のテンソル積から F(X, Z)への複体の写像である．

quasiDG 圏においては, 写像ｕとｖの合成が常に定義されておらず，また定義されるときも一意的に定義されてはいないことである．具体的には, F(X, Y, Z)なる複体が与えられ，F(X, Y, Z)から F(X, Y) と F(Y, Z)のテンソル積への複体の quasi-isomorphism が存在する．また F(X, Y, Z)から F(X, Z)への複体の射が与えられていて，これが合成に対応する．

さらに一般に，n 個の対象 X_1, ... X_n に付随した複体 F(X_1, ..., X_n)が与えられていて，それらの間に上と同様に，二つのタイプの射が与えられ，適切な条件をみたす．

Quasi DG 圏から三角圏を構成する手続きを与えることが目的である．ＤＧ圏の場合にはこの構成は知られているので，それを一般化することになる．

４．研究成果

(1) トーリック多様体をモデルとするサイクル複体の定義を与えることができ，局所化完全列を示すことができた．具体的には代数多様体 X に対し，そのトーリック・サイクル複体 Z(X)を定義した．つぎの局所化完全列を示した．　Ｙが X の閉集合のとき，商複体 Z(X)/Z(Y)が Z(X-Y)と quasi-isomorphic であることを証明した．

(2) 正規な曲面のモティヴィックコホモロジーを明示的に表した．コホモロジーからホモロジーへの標準的な写像が同型であるの

は，特異点解消の因子が有理鎖である場合にちょうど対応することを示した.

(3) 体 k のうえの混合 Tate モティーフの三角圏のなかで，次数０の対象のなす部分圏から，混合 Tate モティーフのアーベル圏への関手を構成し，それがコホモロジー実現関手と両立することを示した.

(4) quasi DG 圏 C に対し，付随する quasi DG 圏 C~ を構成した.（DG 圏にたいしては，この構成は知られていた.）

もっとも困難なのは，C ~における写像のなす複体 F(X, Y)の定義であった.
そのホモトピー圏 Ho(C~)が三角圏であることを示した.

この構成は混合モティーフ層の構成に使われた．具体的には代数多様体Ｓを固定するとき，Ｓ上のシンボルのなす quasi DG 圏を考えることができ，それに上の手続きをほどこすと混合モティーフ層のなす三角圏を得る.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 ３ 件）

① 花村昌樹：混合モティーフの理論と応用，
数学 (2009)，掲載予定，査読有.

② A.Corti and M.Hanamura: Motivic decomposition and intersection Chow groups II, Pure and Applied Mathematics Quarterly Journal 3(2007), 181-203,
査読有

③ M. Hanamura : Motivic sheaves and intersection cohomology, Advanced Studies in Pure Math.46(2007), 67-76,
査読有

〔学会発表〕（計 ３ 件）

① Toric varieties and algebraic cycles
（研究集会「3rd conference on Algebra, Analysis and Geometry」，鹿児島大理学部，２００８年２月１８日）

② Generalized DG categories and mixed motivic sheaves
（セミナー講演，シカゴ大学，２００７年９月２５日）

③ Mixed motivic sheaves and degeneration of varieties
（「Conference on Algebraic K-theory」，トリエステ国際理論物理研究所，２００７年５月２９日）

〔図書〕（計 ０ 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 ０ 件）

○取得状況（計 ０ 件）

〔その他〕

６．研究組織
(1)研究代表者

花村 昌樹 (HANAMURA MASAKI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号： 60189587

(2)研究分担者
(石田氏は 2006-2008 年度，寺杣氏と木村氏は 2006-2007 年度)

石田 正典 (ISHIDA MASANORI)
東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号： 30124548

寺杣 友秀 (TERASOMA TOMOHIDE)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：50192654

木村　俊一(KIMURA SHUNICHI)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10284150

(3)連携研究者
(寺杣氏と木村氏は 2008 年度)

寺杣 友秀 (TERASOMA TOMOHIDE)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：50192654

木村　俊一(KIMURA SHUNICHI)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10284150