

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2006～2009

課題番号：18340002

研究課題名 (和文) 数論幾何における分岐

研究課題名 (英文) Ramification in arithmetic geometry

研究代表者

齋藤 毅 (SAITO TAKESHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：70201506

研究成果の概要 (和文)：

局所体の絶対ガロワ群の分岐群によるフィルトレーションによる次数商の構造を調べた。さらに正標数の代数多様体の  $\ell$  進層に対し、ある条件の下でその特性多様体を定義し、その特性類を特性多様体と 0 切断の交点積として表した。

局所体上の任意の多様体の構成可能層に対しスワン類を定義し、リーマン・ロッホ型公式を相対的な形で証明した。

正標数の局所体の絶対ガロワ群の  $\ell$  進表現の局所フーリエ変換の誘導表現としての明示的表示を、ある条件のもとで与えた。

ヒルベルト保形形式にともなう  $p$  進表現に対し、 $p$  をわる素点での  $p$  進ホッジ理論の意味での局所ラングランズ対応との整合性を証明する論文を完成し発表した。

研究成果の概要 (英文)：

I studied the structure of graded quotients of the filtration by ramification groups of the absolute Galois group of a local field. Using this, I defined the characteristic variety of an  $\ell$ -adic sheaf under some condition and computed the characteristic class as the intersection product with the 0-section.

For an arbitrary constructible sheaf on a variety over a local field, I defined the Swan class and proved a formula of Riemann-Roch type formula in a relative version.

I computed explicitly as an induced representation the local Fourier transform of an  $\ell$ -adic representation of the absolute Galois group of a local field of positive characteristic, under a certain assumption.

For the  $p$ -adic Galois representation associated to a Hilbert modular form, I published a paper establishing the compatibility with the local Langlands correspondence at a prime dividing  $p$  in the sense of  $p$ -adic Hodge theory.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
2007年度	5,700,000	1,710,000	7,410,000
2008年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2009年度	2,000,000	600,000	2,600,000
年度			
総計	14,000,000	4,200,000	18,200,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何学

### 1. 研究開始当初の背景

- (1) スキームの分岐理論において、代数曲線上の $\ell$ 進層のオイラー数を与えるグロタンディーク・オググ・シャファレヴィッチの公式の高次元化は、1960年代にエタール・コホモロジーが定義されて以来の基本的問題であったが、永い間、散発的な結果しか得られていなかった。
- (2) (1)の問題に関してまず、層の分岐を表す基本的な不変量であるスワン類を、研究分担者の加藤和也氏と協力して定義した。そして、それを用いてコホモロジーのオイラー数や導手を表す公式を与え、スワン類と特性類との関係も調べた。
- (3) 一方、剰余体が完全とは限らない局所体のガロワ群の分岐群によるフィルトレーションを、海外研究協力者のアベス氏と協力して定義した。これの次数商の可換性など、基本的な性質のいくつかを証明した。
- (4) これまでの特性類や分岐群の研究で、対角的に埋め込まれた分岐因子でのブローアップを調べるといふ、分岐理論における新しい方法の有効性が明らかになってきた。

### 2. 研究の目的

- (1) 分岐を表す基本的な不変量である、スワン類や特性類の性質を、局所的に明らかにすることが最大の目標である。
- (2) (1)の問題は、局所体の分岐群と密接に関連するものであり、まずこのフィルトレーションによる部分商の構造を捉える。
- (3) (2)の結果をうけて、 $\ell$ 進層の特性多様体を定義し、 $\ell$ 進超局所解析の理論の構築を図る。
- (4) そのほか、分岐理論と深く関係する整数論の問題、特に局所体のガロワ表現の分岐と関係した問題への応用を研究する。

### 3. 研究の方法

- (1) 本研究は、純粋数学の理論的研究であるので、特別な実験装置などは必要なく、十分な時間をかけてじっくり問題ととりくむのが、基本的な研究方法である。
- (2) さまざまな背景をもつ研究者と直接交流して議論することは、研究を進めていくうえで、非常に有効である。そのため、研究集会の主催や参加、あるいは研究者の招へい等を積極的に行った。
- (3) また、既存あるいは新規の文献から学ぶ

ことも、大変重要である。数論幾何関係図書等を購入し、その中から、必要な知識や新しい着想を見出すことができる。

### 4. 研究成果

- (1) 正標数の代数多様体のガロワ被覆の境界における分岐は、余接束をひねったもののアルティン・シュライエル被覆を定めることを証明した。このことから、次のような分岐理論における重要な帰結を導いた。等標数の局所体の絶対ガロワ群の分岐群によるフィルトレーションによる次数商はアーベル群であり、 $p$ 倍すると $0$ であり、その指標群は微分形式の加群で捉えられる。この結果は、混標数の場合にも拡張できる。また、正標数の代数多様体の $\ell$ 進層に対し、ある条件の下でその特性多様体を対数的余接束上の輪体として定義し、その特性類が特性多様体と $0$ 切断の交点積として表される。

この結果は、まだ部分的なものではあるが、一般の階数の層に対し、 $\ell$ 進超局所解析という分野を開くものであり、今後の発展が大きく期待できるものである。対角的に埋め込まれた分岐因子でのブローアップという新しい方法の有効性を示すものであり、微分方程式など隣接分野での研究課題も示唆するものである。

- (2) 局所体上の多様体上のスムーズな $\ell$ 進層のスワン類に対し、切除公式を証明した。このことから、次のような分岐理論における重要な帰結を導いた。スワン類の定義を構成可能層に拡張した。さらに、局所体上の任意の多様体の構成可能層のスワン類に対し、リーマン・ロッホ型公式を相対的な形で証明した。これは、以前の研究で得られていた導手公式を大幅に拡張するものである。

$\ell$ 進層に対するリーマン・ロッホ型公式の問題は、1960年代にエタール・コホモロジーが導入されて以来の懸案であり、これを解決したことは、この分野における非常に大きな成果と言える。

- (3) 正標数の局所体の絶対ガロワ群の $\ell$ 進表現の局所フーリエ変換の誘導表現としての明示的表示を、ある条件のもとで与えた。
- (4) ヒルベルト保形形式にともなう $p$ 進表現に対し、 $p$ をわる素点での $p$ 進ホッジ理論の意味での局所ラングランズ対応との整合性を証明する論文を完成し発表した。この結果

は、有理数体の絶対ガロワ群の 2 次元法  $p$  表現の保形性に関するセール予想の証明の中で、重要な役割を果たすものである。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 21 件)

1. Ahmed Abbes, Takeshi Saito, Local Fourier transform and epsilon factors, *Compositio Mathematica* 掲載決定

2. Takeshi Saito, Hilbert modular forms and  $p$ -adic Hodge theory, *Compositio Mathematica*, 145-5, (2009) 1081-1113.

3. Takeshi Saito, Wild ramification and the characteristic cycle of an  $l$ -adic sheaf,

*Journal de l'Institut de Mathematiques de Jussieu*, (2009) 8(4), 769-829

4. Ahmed Abbes, Takeshi Saito, Analyse micro-locale  $l$ -adique en caracteristique  $p > 0$ : Le cas d'un trait

*Publication of the Research Institute for Mathematical Sciences* 45-1 (2009) 25-74

5. Kazuya Kato, Takeshi Saito, Ramification theory for varieties over a perfect field

*Annals of Mathematics*, 168 (2008), 33-96.

6. Ahmed Abbes, Takeshi Saito, The characteristic class and ramification of an  $l$ -adic etale sheaf,

*Inventiones Mathematicae* 168 No. 3 (2007) 567-612

7. Atsushi Shiho, On logarithmic extension of overconvergent isocrystals,

*Math. Annalen.* (2010)

8. Yuki Yoshi Nakkajima and Atsushi Shiho, Weight filtrations on log crystalline cohomologies of families of open smooth varieties,

*Lecture Note in Mathematics* 1959(2008), Springer.

9. Atsushi Shiho, On logarithmic Hodge-Witt cohomology of regular schemes, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 14(2007), 567--635.

10. Tomohide Terasoma, DG-category and simplicial bar complex, *Moscow Mathematical Journal*,

vol 10, no. 1, (2010), pp.1-37.

11. Tomohide Terasoma, Algebraic correspondences between genus three curves and certain Calabi-yau varieties, *Amer. J. Math.* 132, no1, (2010)

12. Tomohide Terasoma, Geometry of multiple zeta values, *International Congress of Mathematician*,

vol. II, Eur. Math Soc., Zurich, (2006) 627--635,

13. Shuji Saito and Kanetomo Sato, A  $p$ -adic regulator map and finiteness results for arithmetic schemes,

to appear in *Documenta Math.* (2010)

14. Shuji Saito, and Kanetomo Sato, A finite theorem for zero-cycles over  $p$ -adic fields,

to appear in *Annals of Mathematics* (2010)

15. Masanori Asakura and Shuji Saito, Surfaces over a  $p$ -adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles,

*Algebra and Number Theory* 1, (2008), 163--181

16. Masanori Asakura and Shuji Saito, Maximal components of Noether-Lefschetz locus for Beilinson-Hodge cycles,

*Math. Ann.* 341 (2008), 169--199

17. James Lewis and Shuji Saito, Algebraic cycles and Mumford-Griffiths invariants, *Amer. J. of Math.* 129 (2007), 1449--1499

18. Masanori Asakura and Shuji Saito, Beilinson's Hodge conjecture with coefficient for open complete intersections,

*London Math. Society Lecture Note Series* 344 (2007), 3-37

19. Masanori Asakura and Shuji Saito, Generalized Jacobian rings for open complete intersections,

*Math. Nachr.* 279 (2006), 5--37

20. Masanori Asakura and Shuji Saito, Noether-Lefschetz locus for Beilinson-Hodge cycles I,

*Math. Zeit.* 252 (2006), 251--237.

21. Shuji Saito, Beilinson's Hodge and Tate conjectures,

*Transcendental Aspects of Algebraic Cycles*, *London Math. Society Lecture Note Series* 313 (2004), 276-289

[学会発表] (計 22 件)

1. Takeshi Saito, An  $l$ -adic Riemann-Roch formula (joint work with Kazuya Kato), *Conf. in honor of Jean-Marc Fontaine*, IHP, (2010)

2. Takeshi Saito, Local Fourier transform and epsilon factors,

*Journées arithmétiques de Rennes*, Univ. de Rennes (2009)

3. Takeshi Saito, Wild ramification and the characteristic cycle of an  $l$ -adic sheaf,

Algebraic Analysis and Around in honor of Professor Masaki Kashiwara's 60th birthday, Kyoto RIMS, (2007).

4. Takeshi Saito, Wild ramification and the characteristic cycle of an  $l$ -adic sheaf,

A Conference Dedicated to the Mathematical Heritage of Spencer J. Bloch, Fields institute (2007),

5. Takeshi Saito, Ramification of schemes over a local field (joint work with K. Kato).

Arithmetic Algebraic Geometry, (2006), RIMS Kyoto.

6. Takeshi Saito, Ramification of schemes over a local field (joint work with K. Kato).

Arithmetic Algebraic Geometry, El Escorial, Spain.

7. Tomohide Terasoma, Motivic construction of relative completion, 1st PRIMA Congress, Sydney. (2009)

8. Tomohide Terasoma, Thomae's formula for triple covering and binary trees, in International conference on Complex Geometry, Hanoi University of Education, (2008)

9. Tomohide Terasoma, DG category, Bar complex and their applications Cycles, Motives and Shimura varieties, Tata Institute, (2008)

10. Tomohide Terasoma, Beilinson regulator and bar complex for Deligne cohomology, Representation

theory, System of differential equations and related topics, PRIMA, 北海道大学 (2007)

11. Tomohide Terasoma, Simplicial bar construction, polylogmap and Deligne complex, Of Ramification and Vanishing Cycles, 東京大学 (2007)

12. Tomohide Terasoma, Geometry of multiple zeta values, International congress of mathematics, Madrid, (2006)

13. Tomohide Terasoma, GT admissible varieties, Motives and Periods, University of British Columbia, Vancouver, (2006)

14. Atsushi Shiho, On the overconvergence of relative rigid cohomology,  $p$ -adic differential equations: a conference in honor of Gilles Christol, Bressanone (イタリア), (2008).

15. Shuji Saito, Finiteness of motivic cohomology, cohomological Hasse principle, special values of zeta functions, 代数学

シンポジウム, 明治大学, Tokyo, Japan, (2009)

16. Shuji Saito, Finiteness results for motivic cohomology of arithmetic schemes, Quadratic forms, linear algebraic groups and cohomology, University of Hyderabad, Hyderabad, India, (2008)

17. Shuji Saito, Surfaces over a  $p$ -adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles, Algebraic cycles, motives and  $\mathbb{A}^1$ -homotopy theory over general bases, Regensburg, Germany, (2007)

18. Shuji Saito, Surfaces over a  $p$ -adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles, Workshop on the geometry of holomorphic and algebraic curves in complex algebraic varieties, CRM, Montreal, Canada, (2007)

19. Shuji Saito, Surfaces over a  $p$ -adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles, Algebraic K-theory and its Applications, ICTP, Trieste, Italy, (2007)

20. Shuji Saito, A conjecture of Colliot-Thélène on zero-cycles over local fields, Géométrie arithmétique et variétés rationnelles, CIRM, Luminy, France, (2007)

21. Shuji Saito, Finiteness results for motivic cohomology of arithmetic schemes, Arithmetic Geometry, RIMS, Kyoto, Japan, (2006)

22. Shuji Saito, Noether-Lefschetz problem for Beilinson-Hodge cycles on open surfaces, Antalya Algebra Days VIII, Antalya, Turkey, (2006)

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~t-saito>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

斎藤 毅 (SAITO TAKESHI)

東京大学・大学院数理学研究科・教授  
研究者番号：70201506

### (2) 研究分担者

加藤 和也 (KATO KAZUYA)

(20, 21年度は連携研究者)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90111450

齋藤 秀司 (SAITO SHUJI)

(20, 21 年度は連携研究者)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：30153804

寺杣 友秀 (TERASOMA TOMOHIDE)

(20, 21 年度は連携研究者)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：50192654

辻 雄 (TSUJI TAKESHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号：40252530

志甫 淳 (SHIHO ATSUSHI)

(20, 21 年度は連携研究者)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号：30292204