

研究種目：基盤研究(B)  
研究期間：2006～2009  
課題番号：18340004  
研究課題名（和文） 多様体の特異点の研究

研究課題名（英文） Research on the singularities of a variety

## 研究代表者

石井 志保子 (ISHII SHIHOKO)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：60202933

研究成果の概要（和文）：代数多様体の特異点のいくつかの性質と、多様体上のジェットスキーム、弧空間の性質との関連が明らかになった。基礎多様体为非特異であることの特徴付けを、ジェットスキームの非特異性、ジェットスキーム間の切り詰め射の平坦性により与えた。また、代数曲線の退化族と2次元特異点の関係が明らかになった。可換環のイデアルの組に対して正標数の手法を用いてF-閾値の概念を導入し重複度に関する公式の一般化を得た。

研究成果の概要（英文）：We clarified the relationship between some properties of singularities on a variety and the properties on the arc space and the jet schemes over the variety. We gave a characterization of the regularity of the base variety by the flatness of a truncation morphism of jet schemes. The relationship between degenerating families of algebraic curves and two dimensional singularities. We introduced F-threshold for pair of ideals in commutative rings by means of positive characteristic method and generalized the formula on multiplicity.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	2,000,000	0	2,000,000
2007年度	4,000,000	1,200,000	5,200,000
2008年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2009年度	4,000,000	1,200,000	5,200,000
年度			
総計	11,700,000	2,910,000	14,610,000

研究分野：代数幾何学，特異点理論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：特異点，弧空間，ジェットスキーム，双有理幾何学

## 1. 研究開始当初の背景

1968年にNashによって提起された弧空間に関するNash問題は多くの研究者によって2次元の特異点について条件付きで肯定的な解決が得られていたが2003年に石井と

Kollarにより toric variety では任意次元で肯定的に解決され一般の variety では4次元以上で否定的に解決された。一方 Mustata や Ein らは2001年以降弧空間を双有理幾何学に応用し目覚ましい成果を得た。これら2

つの流れを契機に弧空間の研究が飛躍的に発展した。

## 2. 研究の目的

多様体の特異点の性質を弧空間の幾何学的構造で記述すること、附値とそれに付随する弧空間の既約部分集合の関連を明らかにすることを目的とする。

## 3. 研究の方法

国内外の研究者と情報を頻繁に交換し、専門的知識を互いに提供しあい、議論を進めることが大変重要である。そのために、研究代表者、分担者の出張、seminer 講師の依頼など積極的に人的交流を図った。また資料整理、e-mail による通信、論文作成において高性能のコンピューターは必須である。この電算機環境も整備した。

## 4. 研究成果

ジェットスキームが良い性質 (Q-Gorenstein, canonical, log-canonical など) を持てば基礎多様体もそのような性質を持つことがわかった。多様体が多特異であることとその上のあるひとつのジェットスキームが多特異であることと同値であることがわかった。2つの多様体と同形であればその上のジェットスキームも同形になるが、多様体間の射の存在を仮定すれば逆も成立すること、仮定しなければ逆は成立しないことを示した。「代数曲線の退化族と2次元特異点」の関係を明らかにした。また  $C^*$ -作用をもつ「閉リーマン面の退化族と  $C^*$ -作用をもつ2次元特異点」の関係もわかった。

可換環のイデアルの組に対して、正標数の手法を用いて F-threshold の概念を定義した。この概念を用いて De Fernex-Ein-Mustata の正則環のイデアルの重複度に関する結果を一般の環に一般化できると予想される。この予想を次数付き環と次数付きイデアルに対して証明することができた (Huneke-高木-渡辺)。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

- ① S. Ishii, Geometric properties of jet schemes (preprint) to appear in Comm. in Alg. in press, 2011, 査読有
- ② K. Watanabe, C. Huneke, S. Takagi, Multiplicity bounds in graded rings, To appear in Kyoto Journal of Mathematics., in press, 2011, 査読有
- ③ K. Watanabe, H. Nari, T. Numata Pseudo-symmetric and atomic numerical

semigroups generated by three elements, To appear in Proc. Inst. Natural Sci., Nihon Univ., 46, 2011, in press, 査読有

④ K. Watanabe, A. Sannai, F-signature of graded Gorenstein rings, To appear in J. Pure and Appl. Algebra., in press, 2011, 査読有

⑤ K. Watanabe, S. Ohnishi, Coefficient ideal of ideals generated by monomials, To appear in Communications in Algebra., in press, 2011, 査読有

⑥ S. Ishii, Nash problem for a toric pair and the minimal log-discrepancy, Comptes Rendus Math. Acad. Sci. Paris 348, 985-988, 2010, 査読有

⑦ S. Ishii, Isomorphisms of jet schemes Comptes Rendus Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 32, 19-23, 2010, 査読有

⑧ T. Tomaru, Complex surface singularities and degenerations of compact complex curves, Demonstratio Mathematica, 43(2), 39-59, 2010, 査読有

⑨ S. Ishii, Smoothness and jet schemes, Adv. St. Pure Math. 56, 187-199, 2009, 査読有

⑩ K. Watanabe, K. Kurano, E. Sato, A. Singh, Multigraded rings, diagonal subalgebras, and rational singularities, J. of Algebra, 322, 3248-3267, 2009, 査読有

⑪ S. Ishii, T. De Fernex, L. Ein, Divisorial valuations via arcs, Publ. RIMS, 44, 425-448, 2008, 査読有

⑫ S. Ishii, Maximal divisorial sets in arc spaces, Adv. St. Pure Math. 50, 237-249, 2008, 査読有

⑬ K. Watanabe, S. Ohnishi, Coefficient ideals of ideals in  $k[X, Y]$  generated by monomials, Proc. Inst. Natural Sci., Nihon Univ., 43, 347-352, 2008, 査読有

⑭ K. Watanabe, C. Huneke, M. Mustata, S. Takagi, F-thresholds, tight closure, integral closure, and multiplicity bounds, Michigan Math. J. 57, 463-483, 2008, 査読有

⑮ S. Ishii, Jet schemes, arc spaces and the Nash problem, C.R. Math. Rep. Acad. Canada, 29, 1-21, 2007, 査読有

⑯ K. Watanabe, R. Takahashi, Totally reflexive modules constructed from smooth projective curves of genus  $g \geq 2$ , Archiv der Mathematik, 89, 60-67, 2007, 査読有

⑰ T. Tomaru, Pencil genus for normal surface singularities, J. Math. Soc. Japan, 59 (1), 35-80, 2007, 査読有

⑱ S. Ishii, The local Nash problem on arc families of singularities, Annales de

L'Institut Fourier., 56, 1207-1224, 2006, 査読有

⑬K. Watanabe, S. Noh, Adjacent integrally closed ideals in 2-dimensional regular local rings, J. of Algebra, 302, Aug. 156-166, 2006, 査読有

⑭T. Tomaru, 代数曲線の  $C^*$ -作用をもつ退化族と2次元擬斉次特異点, 第2回トポロジー・代数幾何玉原セミナー報告集, 1-19, 2006, 査読有

[学会発表] (計 48 件)

①K. Watanabe, K. Yoshida, A positive characteristic approach to Wang's theorem, 32nd Commutative Algebra Symposium, 6th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2010.12.6, IPC 生産性国際交流センター, 葉山

②K. Watanabe, A variant of Wang's Theorem in positive characteristic, Commutative Algebra and its Interactions with Algebraic Geometry, 2010.11.5, C.I.R.M, Luminy

③S. Ishii, Usual discrepancy versus Mather discrepancy, 特異点と多様体の幾何学, 2010.9.17, 山形大学

④S. Ishii, 特異点の問題, 複素幾何学の諸問題, 2010.9.7, 京都大学数理解析研究所

⑤S. Ishii, Mather discrepancy and arc spaces, Algebraic Geometry and its Applications Abhyankar's 80th birthday Conference, 2010.7.21, Purdue University

⑥K. Watanabe, Some topics on F-thresholds, Workshop on Local Rings and Local Study of Algebraic Varieties, 2010.6.7, ICTP Trieste

⑦K. Watanabe, Some topics on F-thresholds, Frobenius splitting conference, 2010.5.18, Michigan University, Ann Arbor

⑧K. Watanabe, Some topics on F-thresholds, Juergan Herzog を囲む可換代数の集い, 2010.1.28, 大阪大学

⑨K. Watanabe, Some topics on F-thresholds, The 5-th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2010.1.5, Hanoi

⑩K. Watanabe, The  $\mathfrak{a}$  invariants of normal graded Gorenstein rings and varieties with even canonical class, 第31回可換環論シンポジウム, 2009.11.25, アウイーナ大阪

⑪S. Ishii, Isomorphism problem on jet schemes, Invariants in Algebraic Geometry, 2009.11.13, 東京大学

⑫K. Watanabe, The  $\mathfrak{a}$  invariants of normal graded Gorenstein rings and

varieties with even canonical class, 日本数学会一般講演, 2009.9.26, 大阪大学

⑬S. Ishii, From jet schemes to the base scheme --Isomorphism problems (global and local)--, Workshop on Singularities, 2009.9.25, Oberwolfach

⑭S. Ishii, From jet schemes to the base scheme, Austrarian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities, 2009.9.16, Sydney University

⑮S. Ishii, Singularities on jet schemes, Fifth Franco-Japanese Symposium on Singularities, 2009.8.27, Strasbourg University

⑯T. Tomaru,  $C^*$ -degenerations of compact complex curves and cyclic covers of normal  $C^*$ -surface singularities, Singularities in Aarhus, 2009.8.20, Aarhus, Denmark

⑰K. Watanabe, The  $\mathfrak{a}$  invariants of normal graded Gorenstein rings and varieties with even canonical class, PASI 2009, Commutative Algebra and its connections to Geometry, 2009.8.14, Olinda, Brazil

⑱K. Watanabe,  $\mathfrak{a}$ -invariant of normal graded Gorenstein domains and varieties with even canonical class, 2009 PRIMA congress, 2009.7.8, University of New South Wales, Sydney

⑲K. Watanabe,  $\mathfrak{a}$ -invariant of normal graded Gorenstein domains and varieties with even canonical class, Commutative Algebra, 2009.4.24, Oberwolfach

⑳S. Ishii, Geometric properties of jet schemes, Harvard-MIT Algebraic Geometry Seminar, 2009.3.17, Harvard University

㉑S. Ishii, Geometric properties of jet schemes, Main Seminar at MSRI, 2009.3.9, Berkeley, California

㉒K. Watanabe, Hilbert-Kunz multiplicities, Mini Workshop of Algebra, 2009.2.10-11, Taiwan National University

㉓T. Tomaru,  $C^*$ -作用をもつリーマン面の退化族と  $C^*$ -作用をもつ2次元特異点, 多変数函数論冬セミナー, 2008.12.24, 熊本大学理学部

㉔K. Watanabe, Coefficient ideals of monomial idelas, 第30回可換環論シンポジウム, 2008.11.19, 唐津

㉕K. Watanabe, Classification of 2-dimensional normal graded hypersurfaces with small  $\mathfrak{a}$ -invariants, Algebre commutative et ses interactions avec la geometrie algebrique, 2008.10.1, C.I.R.M.

㉖K. Watanabe, Classification of

2-dimensional normal graded hypersurfaces with small  $a$ -invariants, Algebra Workshop, 2008.7.25, Kansas Univ.

②7 S. Ishii, Geometric properties by jet schemes, Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables XII, 2008.7.15, 葉山国際村センター

②8 T. Tomaru, 複素 2 次元特異点と閉リーマン面の退化族について, 日本数学会, 2008.3.24, 近畿大学

②9 K. Watanabe, Methods of characteristic  $p > 0$  in Singularity Theory, 第 3 回代数・解析・幾何セミナー, 2008.2.18, 鹿児島大学

③0 S. Ishii, Introduction to arc spaces and the Nash problem, Fourth meeting for Young Mathematicians in Sedano, 2008.2.4 ~ 9, Sedano, Spain

③1 S. Ishii, Toric varieties, monomial valuations and arc spaces, トーリック多様体の理論の展開と応用, 2008.1.10, 東北大学

③2 K. Watanabe,  $F$ -thresholds, with applications to multiplier ideals, integral closure and multiplicity, Cimpa Conference on Commutative Algebra 2008.1.10, IIT Bombay, Mumbai, India

③3 S. Ishii, Smoothness criteria by jet schemes, Algebraic Geometry and Commutative Algebra Tokyo 2007, 2007.12.13, 東京大学

③4 K. Watanabe,  $F$ -thresholds -- application to lc thresholds and a conjecture on multiplicity, Algebraic Geometry and Commutative Algebra Tokyo 2007, 2007.12.12, 東京大学

③5 K. Watanabe, Classification of  $\mathbb{P}^2$ -dimensional normal graded hypersurfaces with  $a(R)=1$ , 2007.11.22, Palo Alto

③6 K. Watanabe, C. Huneke, M. Mustata, S. Takagi,  $F$ -thresholds, tight closure, integral closure and multiplicity bounds, 第 29 回可換環論シンポジウム, 2007.11.19, 名古屋・池下厚生年金会館

③7 S. Ishii, Arcs and valuations -some finiteness properties-, 城崎代数幾何学シンポジウム, 2007.10.26, 城崎大会議館

③8 T. Tomaru,  $C^*$ -作用をもつリーマン面の退化族と  $C^*$ -作用をもつ 2 次元特異点, 日本数学会, 2007.9.24, 東北大学

③9 K. Watanabe, Ring theoretic properties of  $F$ -thresholds, Hilbert Functions and Syzygies in Commutative Algebra and Combinatorics: A conference in honor of Juergen Herzog on the occasion of his 65<sup>th</sup> birthday, 2007.9.18, Cortona, Italy

④0 S. Ishii, Smoothness criteria by jet

schemes, Foruth Franco-Japanese Symposium on Singularities, 2007.8.28, 立山国際ホテル

④1 K. Watanabe, Methods of characteristic  $p > 0$  in Singularity Theory, Characteristic  $p$  methods in Algebraic Geometry, 2007.7.14-19, Drobeta-Turum-Severin; Romania

④2 T. Tomaru,  $C^*$ -Pencil of curves and  $C^*$ -complex surface singularities, Geometric Singularity Theory, Polish-Japanese Working Days, 2007.7.12, Poland, Sopot

④3 K. Watanabe, Ring theoretic properties of  $F$ -thresholds, Integral Closure, Multiplier Ideals and Cores, 2006.12.21, American Institute of Mathematics, Palo Alto

④4 S. Ishii, Arcs and divisors, Hayashibara Forum at IHES on Singularities, 2006.11.21, IHES Paris

④5 K. Watanabe, Some characteristic  $p$  methods for singularity theory, Workshop in Commutative Algebra, 2006.11.20, Univ. Essen

④6 K. Watanabe, Some Questions on  $F$ -thresholds, Meeting on Commutative Algebra: Dedicated to the memory of Wilfgang Voge, 2006.11.19, Eisenach, Germany

④7 S. Ishii, Introduction to jet schemes and arc spaces, I,II,III, IV, Arc spaces and multiplier ideals, 2006.8.28, 30, 31, 9.1, 京都大学数理解析研究所

④8 K. Watanabe, Multiplier ideals and arc spaces, 2006.8.28-9.1, 京都大学数理解析研究所

〔図書〕 (計 1 件)

① S. Ishii, 数学書房 共著者 20 名, この定理が美しい「運命のつながりーガロワ理論ー」 2009, 11p-19p

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

石井 志保子 (ISHII SHIHOKO)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 6 0 2 0 2 9 3 3

### (2) 研究分担者

泊 昌孝 (TOMARI MASATAKA)  
日本大学・文理学部・教授  
研究者番号: 6 0 1 8 3 8 7 8

藤田 隆夫 (FUJITA TAKAO)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：40092324

渡辺 敬一(WATANABE KEIICHI)  
日本大学・文理学部・教授  
研究者番号：10087083

都丸 正(TOMARU TADASHI)  
群馬大学・医学部・教授  
研究者番号：70132579