

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2006～2009

課題番号：18340010

研究課題名（和文） 安定層のモジュライ空間の研究

研究課題名（英文） Studies on moduli of stable sheaves

研究代表者 吉岡 康太 (Kota Yoshioka)
神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：40274047

研究成果の概要（和文）：Donaldson 型不変量に関し壁超え公式と爆発公式を示した。また K 理論的類似を定式化し壁超え公式を得た。フーリエ向井変換と安定性の関係について研究し、満足できる関係を得た。またその応用としてアーベル曲面上の安定層のモジュライの構造を調べた。

研究成果の概要（英文）：We derived the wall crossing formula and the blow-up formula of the Donaldson invariants. We also formulated K-theoretic analogue of the Donaldson invariants and got the wall crossing formula. We studied the betation of the Fourier-Mukai transform and the stability condition and got a nice result. As an application, we also studied the moduli of stable sheaves on abelian surfaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2007年度	4,000,000	1,200,000	5,200,000
2008年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
2009年度	3,300,000	990,000	4,290,000
年度			
総計	13,900,000	4,170,000	18,070,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ベクトル束

1. 研究開始当初の背景

(1)

連接層のモジュライ空間のコホモロジー環あるいはさまざまな交点数は底空間の構造をよく反映するなど重要でかつ興味深い研究対象である。底空間が代数曲面の場合、これは Donaldson 型不変量と呼ばれ多くの興味深い研究があった。アフィン平面の場合、Donaldson 型不変量はこのままでは意味がな

いが、トーラス作用に関する同変 Donaldson 型不変量は意味がある。その母関数は Nekrasov 分配関数と呼ばれるが、我々の以前の研究により Nekrasov 分配関数と Seiberg-Witten プレポテンシャルの関係が示されていて、それらを使って一般の曲面上の Donaldson 型不変量を解析するのが次の課題であった。また Nekrasov 分配関数はいろいろなタイプがありその性質をより詳しく

研究することも重要な問題であった。

(2)

異なる不変量をもつ層のモジュライ空間の間にはフーリエ向井変換などを通し、非自明な関係があることがわかっていた。これらの関係を追及するのは興味深い問題と考えられていた。

2. 研究の目的

代数多様体上の接続層やベクトル束のモジュライ空間は底空間の性質を良く反映し、面白い幾何学的対象を提供する。また Donaldson 不変量などを通して微分幾何学や数理論理学と関係し、興味深い代数多様体や双有理写像の例を与えることから代数幾何学の中心的テーマの一つである分類理論とも関係する興味深い対象でもある。この研究の目的は次の2点からなる。

(1)

接続層のモジュライ空間のコホモロジーの理解。とくに交点数や Donaldson 型不変量の理解。

(2)

異なる不変量をもつ接続層のモジュライ空間の間の関係理解。
さらにこれらのことと可積分系などとの関係についても研究する。

3. 研究の方法

- (1) e-mail および直接会って議論。
- (2) 関連する研究者の招聘。
- (3) 計算ソフトを使った数値実験。

4. 研究成果

(1)

曲面の爆発における層のモジュライ空間の詳細な関係を調べることと、有理2重点の極小特異点解消の上の層のモジュライ空間を調べることが目的として、perverse coherent 層のモジュライ空間を構成しその構造を調べた。特に曲面の爆発の場合は壁越え現象によりモジュライ空間の挙動を捕らえることができ、たとえば Betti 数の爆発公式のより良い理解が得られた。また Donaldson 型不変量に関する爆発公式が得られた。

(2)

Donaldson 型不変量を調べることについては、cobordism の考えを利用することと、望月卓郎氏の結果を利用することにより、以前 Toric 曲面の場合に示していた Donaldson 不変量の壁越え公式を一般の代数曲面の場合に拡張した。また K -理論的 Donaldson 不変量の壁越え公式を Chern-Simon 項を入れた形で定式化し、Nekrasov 分配関数を利用して書き下した。また射影平面の場合に、Chern-Simon 項が入らないもともとの K -理論的

Donaldson 不変量を楕円関数を使って書き下した。山田は Nekrasov 分配関数に関する AGT 予想を考察し、その5次元版についての予想を定式化した。

(3) モジュライ空間を調べるのに、まず Fourier-Mukai 変換により安定性が保たれるための良い十分条件をえた。またアーベル曲面上のモジュライ空間の双有理構造が Fourier-Mukai 変換で保たれることを示し、その応用として、アルバネーゼ写像のファイバーに現れる既約 Symplectic 多様体の双有理同値類が Lagrangian ファイバー構造を持つための必要十分条件を記述した。さらにピカール数が1のアーベル曲面の場合は、Fourier-Mukai 変換のコホモロジーへの作用を2次形式の言葉で書き表し、ガウスの2次形式論を使い双有理変換を与える Fourier-Mukai 変換を記述した。

偏極 $K3$ 曲面の Fourier-Mukai 双対性を示した。つまりアーベル多様体とその上の直線束のモジュライの間の双対性を偏極 $K3$ 曲面とその上の安定層のモジュライの間の双対性に拡張した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計11件)

① Yoshioka, K.,

An action of a Lie algebra on the homology groups of moduli spaces of stable sheaves, Adv. Stud. Pure Math. to appear (査読有)

② H. Nakajima and K. Yoshioka

Perverse coherent sheaves on blow-up. II. wall-crossing and Betti numbers formula, J. Algebraic Geom. to appear (査読有)

③ H. Nakajima and K. Yoshioka

Perverse coherent sheaves on blow-up. I. a quiver description, Advanced Studies in Pure Mathematics, to appear (査読有)

④ K. Yoshioka

Fourier-Mukai transform on abelian surfaces, Math. Ann. Vol. 345 (2009), 493--524 (査読有)

⑤ K. Yoshioka:

Stability and the Fourier-Mukai transform II, Compositio Mathematica, vol. 145 (2009), 112--142 (査読有)

⑥ L. Goettsche, H. Nakajima and K. Yoshioka

K-theoretic Donaldson invariants via Instanton Counting,
Pure and Applied Mathematics Quarterly,
vol. 5 (2009), 1029--1111 (査読有)

⑦ L. Goettsche, H. Nakajima and K. Yoshioka

Instanton counting and Donaldson invariants,
J. Differential Geom. Vol. 80 (2008),
343--390 (査読有)

⑧ D. Matsushita

On nef reductions of projective irreducible symplectic manifolds,
Math. Z., Vol. 258 (2008), 267--270 (査読有)

⑨ H. Nakajima

Sheaves on ALE spaces and quiver varieties,
Mosc. Math. J., Vol. 7 (2007) 699--722 (査読有)

[学会発表] (計8件)

① 吉岡康太

Fourier-Mukai duality for K3 surfaces,
Kobe Workshop on Geometry of Moduli Spaces,
Kobe University,
July 20 - July 22, 2009

② 吉岡康太

Perverse coherent sheaves on surfaces,
Seminar Algebraic Geometry (SAG),
April 30, 2009,
Max-Planck Institute for Mathematics

③ 中島啓

Instanton counting and wall-crossing in Donaldson invariants,
Mirror symmetry and related topics,
Jan. 19 - 24, 2009,
Univ. of Miami

④ 吉岡康太

Fourier-Mukai transform and the moduli of stable sheaves on abelian surfaces,
Complex Geometry in Osaka, 藤木先生還暦記念研究集会,
2007年11月1日~5日
大阪大学中之島センター

⑤ 吉岡康太 Stability and the Fourier-Mukai transform,

Algebraic and Arithmetic Structures of

Moduli Spaces,
Hokkaido University,
9/3--9/7, 2007

⑥ 吉岡康太

Stability and the Fourier-Mukai transform,
Workshop: Non-linear integral transforms: Fourier-Mukai and Nahm,
Centre de recherches mathematiques,
8/27--8/31, 2007

⑦ 吉岡康太

代数曲面上のベクトル束のモジュライ空間,
日本数学会 2007 年度年会・代数学分科会特別講演,
埼玉大学
2007年3月27日--3月30日

⑧ 吉岡康太

Stability and the Fourier-Mukai transform,
Higher Dimensional Algebraic Geometry,
Echigo Yuzawa,
12/11--12/15, 2006

[図書] (計0件)

該当なし

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

該当なし

○取得状況 (計0件)

該当なし

[その他]

該当なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉岡 康太 (YOSHIOKA KOTA)
神戸大学・理学研究科・教授
研究者番号: 40274047

(2) 研究分担者

齋藤 政彦 (SAITO MASAHIKO)
神戸大学・理学研究科・教授
研究者番号: 80183044

研究分担者

山田 泰彦 (YAMADA YASUHIKO)
神戸大学・理学研究科・教授
研究者番号: 00202383

研究分担者

野海 正俊 (NOUMI MASATOSHI)

神戸大学・自然科学系先端融合研究環重点
研究部・教授
研究者番号：80164672

(3)連携研究者
中島 啓 (NAKAJIMA HIRAKU)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：00201666

連携研究者
松下 大介 (MASTUSHITA DAISUKE)
北海道大学・理学研究院・准教授
研究者番号：90333591

連携研究者
稲場 道明 (INABA MICHIAKI)
京都大学・理学研究科・講師
研究者番号：80359934