

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2006年～2009年

課題番号：18340013

研究課題名 (和文) 特異点論の応用としての微分幾何と偏微分方程式

研究課題名 (英文) Differential Geometry and Partial Differential Equations  
as an application of Singularity theory

研究代表者

泉屋 周一 (IZUMIYA SHYUICHI)

北海道大学・大学院理学研究院・教授  
80127422

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：特異点論、微分幾何、偏微分方程式、シンプレクティック幾何、画像処理

### 1. 研究計画の概要

特異点論の故郷は幾何学である。現代幾何学における2つの大きな分野として、位相幾何学と微分幾何学が挙げられるが、特異点論は両方の幾何学を故郷としている。近年、数学内外の様々な分野に現れる非線形現象や特異性がある種の微分可能写像の特異点として捉えられることが、次第に明らかにされてきている。特に、部分多様体の微分幾何学、特異点を許容するような図形の微分幾何学、複素解析の曲面の孤立特異点の近傍に現れる接触構造やシンプレクティック構造、画像処理 (映像理論) などがその例として挙げられる。これらをまとめて標語的に言い表すと表題の「特異点論の応用としての微分幾何と偏微分方程式」と言うことができる。当研究は、これらの分野といままで知られていなかった新たな分野への応用を目指して特異点論の基礎的部分の改良とその具体的応用を実施するものである。

### 2. 研究の進捗状況

これまでの3年間を通して、ほぼ予定通りの研究が進展している。代表者は主に微分幾何学とその理論物理との関連について、特異点論を応用することにより新たな知見を与えた。その結果、微分幾何学への特異点論の応用は近年の停滞期を得て、世界的に最近再び活発に研究が進展し始める切っ掛けを与えた。

### 3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している  
(理由)

平成20年度までの研究成果として顕著なものは、反ド・シッター空間内の空間的曲面の外在的微分幾何学の構成

と特異点論の応用と双曲空間内のホロタイトはめ込みの研究がある。反ド・シッター空間は近年素粒子論や宇宙論で注目されているローレンツ空間形であり、理論物理学において重要な研究対象である。当研究では特異点論を応用することにより、新たな幾何的不変量 (ある種の曲率) を発見し、その幾何学的意味を研究した。さらに、大域的性質としてその曲率に対してガウス・ボンネ型の積分公式が成り立つことを示した。一方、双曲空間内へのホロタイトはめ込みの概念は1979年に Cecil と Ryan が導入して以来、研究の著しい進展が見られない。特に、その幾何学的特徴付けは今まで全く知られていなかった。当研究では、ホロタイトはめ込みと昨年までの研究で得られたホロ球面的絶対全曲率との関係を考察し、結果として、球面のホロタイトはめ込みは Cecil と Ryan が定義した双曲的タイトはめ込みと同値となることがわかり、1985年に Cecil と Ryan が提出した「球面のホロタイトはめ込みを特徴付けよ」という問題に完全な解答を与えた。

### 4. 今後の研究の推進方策

今後もさらに、理論物理学と関連した部分や映像理論と関連した分野を中心に特異点論の応用を試みて行く。特にこの3年間で蓄積した方法と知識を用いてさらに未開拓な分野への応用を試みることにする。本研究課題はあと1年で終了するので、最終年度として昨年までに確認された諸現象の更なる研究とそれらから予想される具体的な定理の証明と完成等を目指す。具体的には、

分担者や連携研究者は大まかに3つのグループに分けることができる。(a) 微分幾何学、シンプレクティック幾何学や偏微分方程式の幾何学的理論において問題の発掘と理論の整備を行うグループ:(小野、山口、梅原)。(b) 偏微分方程式論の解析的側面の整備と映像理論や結晶成長の理論における偏微分方程式の解に特異点が出現する状況を幾何学的測度論や解析的方法により研究するグループ:(利根川、小池)。(c) 他のグループで整備された概念、道具を特異点論の立場から見直し、応用が可能なものは応用し、問題点を整備しそれを他のグループへフィードバックするグループ:(泉屋、石川、大本)。これらの役割分担の下で、各グループで得られた問題点や結果を分担者会議や個別の研究打ち合わせなどを通して、研究を推進する。昨年度までに得られた、問題点や新たな現象にたいして、上の研究分担に沿って、具体的な目標をたて、成立する諸定理などの目標を決め具体的に証明を試みる。さらに昨年度までと同様に目標となる幾何学的現象や偏微分方程式の種類を定めることも平行して行う。

#### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

1 S. Izumiya and F. Tari: Projections of surfaces in the hyperbolic space to hyperhorospheres and hyperplanes, *Revista Matematica Iberoamericana* 24, 895--920 (2008) (査読有)

2 A. A. Davydov, G. Ishikawa, S. Izumiya and W.-Z. Sun: Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane, *Japanese Journal of Mathematics* {¥bf 3}, 93--119 (2008) (査読有)

3 K. Yamaguchi: Geometry of linear differential systems towards contact geometry of second order. *Symmetries and overdetermined systems of partial differential equations*, 151--203, IMA Vol. Math. Appl., 144, Springer, New York, (2008) (査読有) .

4 M. G. Westdickenberg and Y. Tonega: Higher multiplicity in the one-dimensional Allen-Cahn action functional. *Indiana Univ. Math. J.* 56 6, 2935--2989. (2007) (査読有)

5 K. Ono: Floer-Novikov cohomology and the flux conjecture. *Geom. Funct. Anal.* 16 ,no. 5, 981-1020 (2006). (査読有)

6 T. Ohmoto and F., Aicardi : First order local invariants of apparent contours. *Topology* 45 1, 27-45 (2006) (査読有)

[学会発表] (計2件)

7 S. Izumiya: Spacelike surfaces in Anti de Sitter 4-space, Real and Complex singularities ICMC-USP, Sao Carlos, Brazil, 2008年7月27日

8 S. Izumiya : Horospherical geometry in Hyperbolic space International conference Analysis and Singularities (Arnol'd 70) Steklov Institute (MOSCOW) 2007年8月24日

[図書] (計3件)

1 S. Izumiya, G. Ishikawa, H. Tokunaga, I. Shimada and T. Sano: Singularity theory and Its Applications, *Advanced Studies in Pure Mathematics* vol. 43 Mathematical Society of Japan, 1-583 (2006)

2 竹内伸子、泉屋周一、村山光孝: 座標幾何学-古典的解析幾何学入門- 日科技連出版、1-220ページ 2008年

3 泉屋周一: 初級 線形代数、共立出版 110ページ 2008年