様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月２２日現在

研究種目：基盤研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：１８３４００３４
研究課題名（和文）　スペクトル理論・幾何学がもたらす逆問題の数値計算の発展

研究課題名（英文）　Development of numerical computation brought by spectral theory and geometry

研究代表者
磯崎　洋（ISOZAKI HIROSHI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：90111913

研究成果の概要：
（１）　３次元有界領域の表面の一部分におけるディリクレ・ノイマン写像から領域内部の包含物の位置を特定する逆問題のアルゴリズムを検証する数値計算を行い，結果を３次元的に表示した.
（２）　漸近的双曲多様体と Waveguide の例を含む非コンパクトな多様体上において一つの end に対応する散乱作用素から全体のリーマン計量を同定する問題を解決した.

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	6,400,000	1,920,000	8,320,000
２００７年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
２００８年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
年度			
年度			
総　計	13,300,000	3,990,000	17,290,000

研究分野：散乱理論と逆問題
科研費の分科・細目：基礎解析学
キーワード：逆問題，ディリクレ・ノイマン写像，EIT，散乱理論，S 行列

１．研究開始当初の背景

Electrical Impedance Tomography (EIT) は電気伝導体内部の電気伝導度を物体表面の観測データから定める問題である．この問題は，医学や工学においては人体あるいは物体表面に電極をおいて人体（あるいは物体）内の異常部分を特定するという電気的計測による診断法を意味する．これは医学においては患者に苦痛や危険を与えることなしに心臓や肝臓の機能を検査する方法であり，また工学においては，表面の観測値から物質内の様子を調べる非破壊検査を意味する．このように EIT は実際の問題から派生した問題であり数学的にはある偏微分方程式の境界値問題の解の境界における情報から方程式の係数を定める問題として定式化されるが，これは非線形の困難な問題であり，計測誤差に大きく左右される．このため正しい数学的理論の裏づけをもった再構成アルゴリズムが肝要となる.

研究代表者は本研究課題の準備段階において物体の表面の一部での観測データから物体内部の包含物の位置を特定する数学的方法を得ていた．本研究はその成果にもとづき厳密な数学的理論によって３次元における EIT 再構成アルゴリズムを確立し，そ

の数値計算を行うことを目的とした．本研究は正しい数学的理論に基づくものであるため信頼性が高いことが予想された．

また本研究の基礎にあるのは微分方程式論と幾何学にもとづいた逆問題の数学的研究である．例えば上の EIT の問題でも現実の物体の電気伝導度はスカラー関数ではなしにテンソルであり，数学的にはリーマン計量を決定する問題となる．この意味でこの研究のためにはリーマン計量を決定する逆問題の研究が理論上重要となる．このためリーマン多様体のスペクトルデータからリーマン計量を定める問題の研究を同時に行った．

２．研究の目的

この計画の具体的目標は次である．

２次元，３次元物体の電気伝導度の不連続部分を物体表面の一部分からの計測によって同定する．

コンパクトな多様体にコンパクトでない多様体を付加し，ユークリッド計量あるいは双曲計量に漸近する計量を与える．その多様体の S 行列からリーマン計量を再構成する問題を考える．

３．研究の方法

数値計算研究においては代表者の磯崎が理論部分を担当し，日本からは井手貴範，仲田晋の両氏，フィンランドから Samuli Siltanen 氏が数値計算部門を担当した．また多様体の計量を定める問題においては，代表者と英国の Y. Kurylev，フィンランドの M. Lassas との共同研究を行った．

４．研究成果

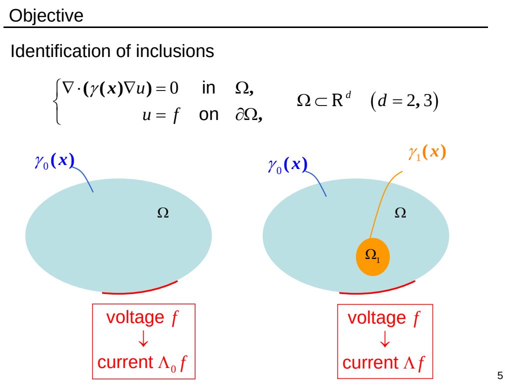
(１)数値計算プロジェクトについて

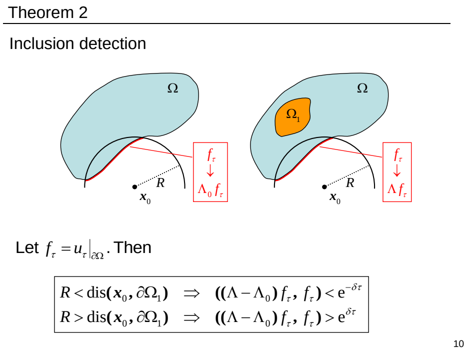
３次元数値計算において良好な結果を得ることができた．ノイマン-ディリクレ写像を用いて計算する予定でいたが、２次元の一般領域において大きな計算誤差を生ずることが分かり、計画を修正してディリクレ-ノイマン写像によって計算を行うことにした．

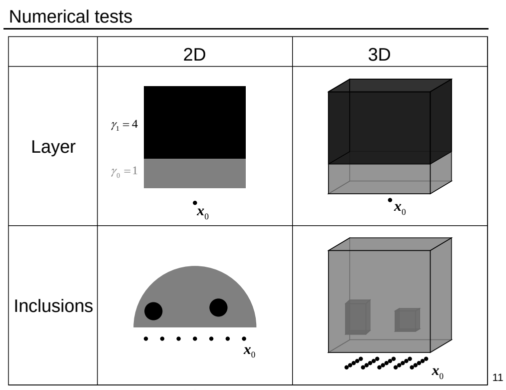
立方体の底面に平行な面の上と下で電気伝導度が異なる定数となる状況を考え，その中でラプラス方程式を具体的に解くことにより，探査を与える関数を明示的に構成した．それを用いて数値計算を行い，良好な精度で物体内の包含物までの距離を計算できることを確認した．

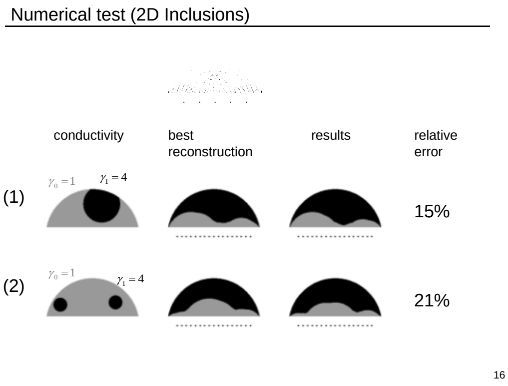
ついで物体内に球状の包含物を１個，あるいは２個想定し，物体底面からの探査によって物体の位置を特定する数値計算を行った．ディリクレ-ノイマン写像の２つの値を比較することによって探査に用いた球面が物体に接触するか否かを判定するアルゴリズムを実行した．結果を３次元的に可視化することができ，予想どうりの良好な結果が得られ，我々の方法が有効であることが立証された．現在，結果を論文としてまとめているところである．

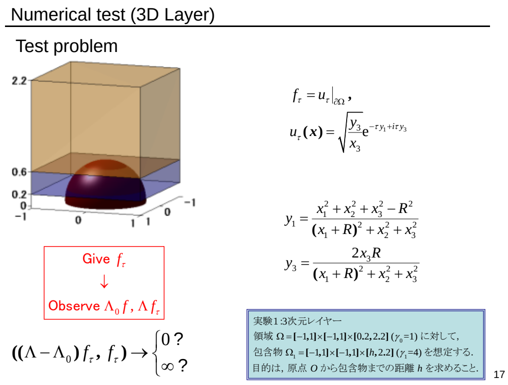
以下に我々の手法を説明する．

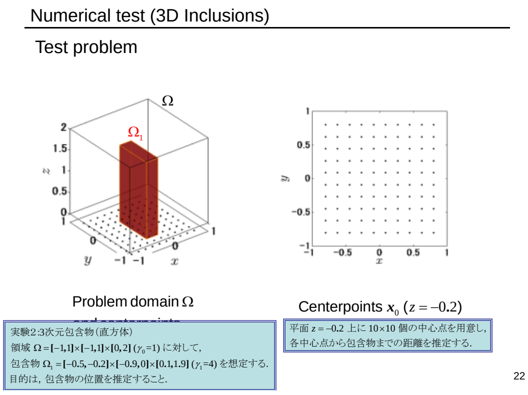


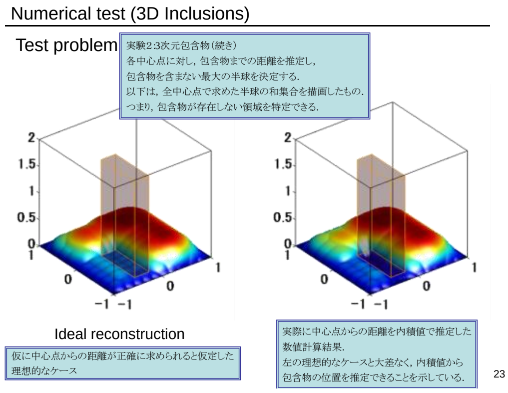


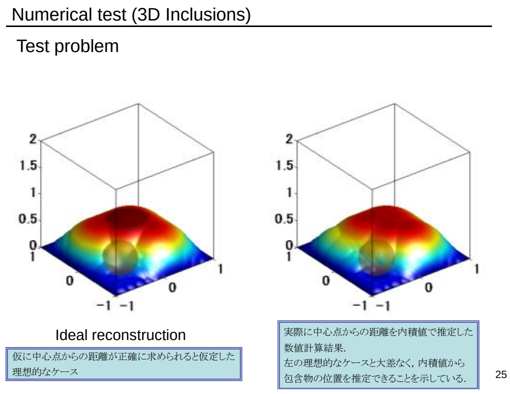












またこのような探査法は熱方程式に対する逆問題に対しても有効であることがプロバンス大学（フランス）との共同研究によって分かった．こちらの方も現在論文にまとめる作業を行っている．

（２）非コンパクト多様体上の逆散乱問題

コンパクトでないリーマン多様体上での波動を観測することにより多様体のリーマン計量を決定する問題は重要な逆問題であるが，これまではあまり詳しいことは知られていなかった．重要な例としてコンパクトな多様体にコンパクトでない end が複数個接合されておりそこには漸近的にユークリッド的，或いは双曲的な計量が与えられている，という多様体を研究した．前者は日常生活によく現れる Waveguide をモデルとしており，後者は幾何学的に有限な双曲空間をモデルとしている．これは特に数論的曲面を含み，数学的に重要なものである．次のような結果が得られた．

各 end はコンパクト多様体と半無限区間の直積と微分同相でありリーマン計量はユークリッド的な捻じれ積または双曲的な捻じれ積に短距離型の意味で収束するものとする．このような多様体が２つ与えられ，さらに一つの end においては計量が一致し，またＳ行列もすべてのエネルギーに対して一致するものとする．Waveguide のモデルの場合には上の仮定に加えて，その end ではリーマン計量が純粋にユークリッド的であるとする．このとき２つの多様体は等長である．すなわち微分同相でありリーマン計量も一致する．

この定理は研究代表者が長く行ってきた散乱問題の研究と，境界制御法と呼ばれるコンパクト多様体上の波動方程式に対する逆問題の手法を融合することによって行われる．

研究代表者の研究はいろいろな数学の分野に関連するものであり、研究分担者、連携研究者との討論、研究連絡が重要であった．

ＥＩＴ逆問題に関連したことを述べる．田

沼は弾性体表面を伝わる Rayleigh 波の研究を行った。中村は弾性体の方程式に関する逆問題、ならびにエラストグラフィーの研究を行った．平良は工学,医学に現われる弾性体の方程式の研究を行った． 数値計算に関しては、佐々木は計算代数の立場から Groebner 基底に関する計算の研究を行った．多様体上の逆問題に関しては 勝田は境界付きリーマン多様体の境界からの距離表現から内部のリーマン計量を復元する問題を考察した．また筧はRadon変換の像決定の問題、並びにある種のコンパクト対称空間上の Schroedinger 方程式の基本解の研究を行った．数理物理学に関しては田村は磁場を持つ２次元 Schroedinger 作用素の散乱と Aharonov-Bohm 効果の研究を行った．岩塚はＡ－Ｂ効果に関連してトーラス内に磁場をもつ作用素のレゾルベントの研究を行った．若林は双曲型方程式の初期値問題の研究を行った．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１１件）

① K. Hasegawa, S. Nakata, S. Tanaka, A Fast Solver for 3D Meshless Analysis Based on RPIM, Theoretical and Applied Mechanics Japan, Vol.56, pp.439-444, 2008.（査読有）．
② G. Nakamura, Y. Jiang, S. Nagayasu, and J. Cheng, Inversion analysis for magnetic resonance elastography. Appl. Anal. 87 (2008), no. 2, 165--179（査読有）．
③ H. Isozaki, Inverse boundary value problems in the horosphere – A link between hyperbolic geometry and electrical impedance tomography, Inverse Problems And Imaging, Vol 1 No1 (2007), 55-82 （査読有）．
④ T. Ide, H. Isozaki, S. Nakata, S. Siltanen and G. Uhlmann, Probing for electrical inclusions with complex spherical waves, CPAM Vol LX (2007), 1415-1442（査読有）．
⑤ H. Isozaki, The d-bar-theory for inverse boundary value problems associated with Schroedinger operators on hyperbolic spaces, Publ. RIMS Kyoto Univ. 43 (2007), 201-240（査読有）．
⑥ K. Tanuma, Stroh formalism and Rayleigh Waves, (special invited exposition), Journal of Elasticity, Vol.89 (2007), 5-154（査読有）．
⑦ T.Sasaki. Tighter bounds of errors of numerical roots, Japan J. Indus. Appl. Math., Vol 24, pp. 219--226 (2007).
⑧ A. Katsuda, Y. Kurylev, M.Lassas, Matti;Stability of boundary distance representation and reconstruction of Riemannian manifolds, Inverse Problems and Imaging 1 (2007) no. 1 135—157 （査読有）
⑨ H.Tamura , Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields: total cross sections, Ann.Henri Poincare, 8 (2007), 1071--1114（査読有）．
⑩ S.Wakabaysi, Remarks on hyperbolic systems of first order with constant coefficient characteristic polynomials, Osaka J. Math. 44-2 (2007), 367－397（査読有）
⑪ F. Gonzalez and T.Kakehi, Moment conditions and support theorems for Radon transforms on affine Grassmann manifolds, Advances in Mathematics, 201 (2006), 516-548（査読有）．

〔学会発表〕（計１０件）

① 2009 年 2 月 19 日 CIRM conference (Marseille), 磯崎洋, Inverse scattering on Riemannian manifolds
② 2009 年 1 月 9 日 東大 国際研究集会 Schrodinger Equations and Related Topics, 磯崎洋, Gauge equivalence and inverse scattering for Aharonov-Bohm effects
③ 2008年11月22日(中央大学 Encounters in Mathematics, 磯崎洋, Gelfand-Levitan 理論, 境界制御法から逆散乱理論まで
④ 2008 年 10 月 9 日 The international conference on inverse problems and its application（復旦大学）, 磯崎洋, Inverse scattering on Riemannian manifolds with several ends
⑤ 2008年8月11日～13日京都大学数理解析研究所短期共同, 磯崎洋, 双曲空間上の微分方程式に対する超局所解析と幾何解析, 「双曲空間上の波動方程式とスペクトル理論（連続講演)」
⑥ 2008年3月25日 PIERS (Progress in Electromagnetics Research Symposium) 2008 Hangzhou ［中国 杭州], 磯崎洋, Inverse scattering in a waveguide
⑦ 2007 年 12 月 7 日 4th Pacific RIM Conference (HongKong), H.Isozaki, Inverse scattering for asymptotically

Euclidean metric

⑧ 2007 年 9 月 27 日 電通大 International Workshop on Applied Mathematics and Computational Science, 磯崎洋, Inverse boundary value problems and hyperbolic spaces

⑨ 2007年7月28日St. Petersuburg, Euler 研究所, 磯崎洋, Inverse scattering for asymptotically Euclidean metric

⑩ 2006年9月20日 日本数学会秋季総合分科会（大阪市立大学），磯崎洋，散乱理論と逆問題

６．研究組織

(1)研究代表者
磯崎 洋（ISOZAKI HIROSHI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：90111913

(2)研究分担者
佐々木 建昭（SASAKI TATEAKI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：80087436
平良 和昭（TAIRA KAZUAKI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：90016163
若林 誠一郎（WAKABAYASHI SEIICHIROU）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：10015894
筧 知之（KAKEHI TOMOYUKI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：70231248
伊藤 健一（ITOU KENICHI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・助教
研究者番号：90512509
仲田 晋（NAKATA SUSUMU）
立命館大学・情報理工学部・准教授
研究者番号：00351320
中村 玄（NAKAMURA GEN）
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50118535
池畠 優（IKEHATA MASARU）
群馬大学・工学部・教授
研究者番号90202910
田沼 一実（TANUMA KAZUMI）
群馬大学・工学部・准教授
研究者番号：60217156
岩塚 明（IWATSUKA AKIRA）
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号：40184890
田村 英男（TAMURA HIDEO）
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：30022734
勝田 篤（KATSUDA ATSUSHI）
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：60183779