

平成 21 年 5 月 8 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2006～2009

課題番号：18340041

研究課題名 (和文) 量子物理学の数理解析

研究課題名 (英文) Mathematical analysis of quantum physics

研究代表者

谷島 賢二 (KENJI YAJIMA)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：80011758

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：数理解析学、関数解析学、偏微分方程式、スペクトル理論、量子力学

## 1. 研究計画の概要

量子力学に現れる線形・非線型偏微分方程式あるいは自己共役作用素についての数学的解析を研究する。特に

(1) シュレーディンガー作用素の散乱理論における波動作用素のルベグ空間における連続性あるいは不連続性の研究

(2) シュレーディンガー方程式の解の特異性伝播問題の研究

(3) シュレーディンガー方程式の基本解の性質の研究

(4) 時間に依存する不連続なポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式の解作用素の存在と一意性の研究

(5) ファインマン経路積分の数学的研究を行う。

## 2. 研究の進捗状況

研究計画の (1) から (5) について：

(1) については作用素が連続スペクトルの下端に特異性を持つ場合の解析を行い、おおむね解決したが、空間次元が 4 次元の場合は部分的に未解決、2 次元の場合は全く未解決のまま残ってしまっている。他の次元の場合もスペクトル下端におけるレゾナンス関数・固有関数の性質による連続性・不連続性の特徴付けについては未完成。

(2) 2 階微分の係数がいわゆる短距離型の場合にはほぼ完全に解決したが、長距離型の場合にはまだ不完全である。

(3) 調和振動子の劣二次型摂動の基本解の共鳴時間における非有界性が部分的に解決された。また劣一次型ベクトルポテンシャルをもつ場合の任意時間における有界性・正則性が完全未解決、優二次ポテンシャルをもつ

場合の基本解の非正則性・非有界性の問題は空間一次元の場合あるいはそれに帰着できる場合を除いて未解決

(4) 作用素の半群の理論を適用し、ポテンシャルが時間に依存しない場合に作用素が本質的に自己共役となるために今日知られている最も一般的なスカラーおよびベクトルポテンシャルを含む形で解作用素の存在と一意性を証明したが、いわゆる一点相互作用などのより特異な場合が取り扱えるか否かの検証が未完。

(5) ファインマン経路積分をより一般的な振幅関数を持つ場合に拡張し、そのプランク定数に関する漸近展開の第二項を求めた。またこの解析に必要な大きな次元における停留位相法の剰余項に対する精密な評価を行った。

## 3. 現在までの達成度

② おおむね順調に進展している。

(理由)

研究の進展状況に述べたように、まだ未解決な部分も多いがある場合は目標とした問題が完全に解決され、またある場合は部分的な解決が得られている。おおむね順調といえよう。

## 4. 今後の研究の推進方策

研究の進展状況において説明した様々な未解決問題にまずは取り組んでいく。また (1) については磁場を持つ作用素に研究を発展させていきたいが、そのためにはある種の特異なシンボルを持つ擬微分作用素のルベグ空間における連続性が必要であり M、新たなアイデアが必要かもしれない。さらに

非線形問題への応用を勘案して研究の枠を広げ、非自己共役作用素のスペクトル理論を研究して行く。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

- ① Shu Nakamura, Wave front set for solutions to Schroedinger equations, J. Funct. Anal. Vol. 256, 2009, 1299-1309, 査読有
- ② Naoto Kumano-go, Daisuke Fujiwara, Phase space Feynman path integral via piecewise bicharacteristic paths and their semi-classical approximations, Bull. Sci. Math. vol. 132, 2008, 313—357, 査読有
- ② Kenji Yajima, The  $L^p$  boundedness of wave operators for Schroedinger operators with threshold singularities I, Odd dimensional case, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, vol 13, 2006, 43—93, 査読有,
- ④ Domenico Finco, Kenji Yajima, The  $L^p$  boundedness of wave operators for Schroedinger operators with threshold singularities II, Even dimensional case, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, vol 13, 2006, 277--356, 査読有,
- ⑤ Andre Martinez, Shu Nakamura, Vania Sordani, Analytic smoothing effect for Schroedinger equations with long range perturbation, Comm. Pure. Appl. Math. vol 59, 2006, 1330-1361, 査読有

[学会発表] (計 25 件)

- ① Daisuke Fujiwara, The second term of the semi-classical asymptotic expansion for Feynman path integrals with integrand of polynomial growth, 2008年11月21日, Copenhagen Univ. Denmark.
- ② Kenji Yajima, Review of the fundamental solution to Schroedinger equation, Mathematical Horizon of quantum physics, 2008年9月9日、National Univ. Singapore, Singapore
- ③ Kenji Yajima, On fundamental solution of Schroedinger equations, Meccanica, A conference in honor of S. Graffi's 65-th birthday, 2008年8月27日, Univ. Bologna, Italy.
- ④ Kenji Yajima, The  $L^p$  boundedness of wave operators for Schroedinger operators, 35-th Journées equations

aux derives partielles, 2008年6月3日, Evian, France

- ⑤ Kenji Yajima, Lectures on topics of Schroedinger operators, Lecture series of Instituto d'Alta Matematica, 2007年5月4日, Univ. Rome I, La Sapienza, Italy\_

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]