

平成22年 6月 5日現在

研究種目： 基盤研究 (B)
 研究期間： 2006 ~ 2009
 課題番号： 18340041
 研究課題名 (和文) 量子物理学の数理解析

研究課題名 (英文) Mathematical Analysis of Quantum Physics

研究代表者

谷島 賢二 (YAJIMA KENJI)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：80011758

研究成果の概要 (和文)：原子・分子の状態あるいは運動を記述する量子力学の基本方程式であるシュレーディンガー方程式を研究して以下の成果を得た。(1) 初期値問題の基本解の無限遠での振る舞いに関する新たな知見を得た；(2) 解の特異性の伝播問題の新たな研究手法を開発して分野の研究を進展させた；(3) 散乱問題の波動作用素の性質について未解決問題を解決した；(4) ランダムシュレーディンガー作用素のスペクトルの性質についての未解決問題を解決した。

研究成果の概要 (英文)：We studied mathematical problems on Schroedinger equations which are fundamental equation for describing the dynamics of quantum particles and obtained following results：(1) New results are obtained on the behavior at infinity of the fundamental solutions of the initial value problems；(2) new methods for studying the propagation of singularities of solutions are found；(3) unsolved problems on wave operators of scattering have been solved；(4) new spectral properties of random Schroedinger operators are found.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	2,200,000	660,000	2,860,000
2007年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2008年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2009年度	2,000,000	600,000	2,600,000
年度			
総計	8,200,000	2,460,000	10,660,000

研究分野：数理物理学、偏微分方程式、関数解析

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：関数方程式、関数解析、実解析

1. 研究開始当初の背景

シュレーディンガー方程式の解の性質、ならびにシュレーディンガー作用素のスペクトル・散乱理論は多くの研究者によって研究されてきていたが多くの問題が未解決であっ

た。その中でも研究代表者や分担者が研究してきた基本解の正則性・有界性の問題、解の特異性の伝播問題、散乱の波動作用素の性質、ランダムシュレーディンガー作用素のスペクトル問題についての研究の状況は研究開

始においては以下のものであった。

(1) 磁場をもつシュレーディンガー方程式の初期値問題の基本解は任意有限時間において有界か、また2次関数的に増大するポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の基本解は有限時間では常に無限遠方において有界であるかどうか未解決であった。

(2) 解の特異性あるいは超局所特異性の伝播問題は、問題自身の適切な定式化がなれておらず研究開始時点で得られていた研究成果は混沌としていた。

(3) 散乱の波動作用素はシュレーディンガー作用素が連続スペクトルの下端に特異性を持たない場合は任意の指数のルベグ空間あるいはソボレフ空間において有界であることは既に研究代表者によって示されていたが、連続スペクトルの下端に特異性を持つ場合に適当な指数をもつルベグ空間において有界となるか否かは未解決であった。

(4) アンダーソン局在の問題などランダムシュレーディンガー作用素のスペクトル解析に関するほとんどの研究はポテンシャルが下に有界な場合に限られていて、そうでない場合のスペクトル問題は多く未解決であった。これらの問題を解決するのが研究の動機であった。

2. 研究の目的

シュレーディンガー方程式の解の性質、ならびにシュレーディンガー作用素のスペクトル・散乱理論を研究し、とくに研究開始当初の背景に述べた問題を解決して量子力学系のダイナミクスの理解を深めるとともに、この研究を通して解析学、とくに偏微分方程式あるいは関数解析の研究における新たな手法を開発するのが目的である。

3. 研究の方法

数学の研究の方法は研究者各自の自己研鑽による研究による以外には研究者相互の連絡・討議によるアイデアの交換、および学術論文・図書を通しての専門知識の習得と研究情報の収集以外にはない。そのため、以下の方法によって研究を進めた。

(1) 国内外の研究課題に関連した指導的研究者を招聘して集中講義あるいは連続セミナーをお願いして研究成果を報告していただいて専門知識と研究情報を習得した。

(2) 研究代表者、分担者の所属機関において定期的に研究セミナーを開催して最新の研究情報を収集した。

(3) 共同研究者を訪問あるいは招聘して研究課題についてのアイデアを交換し、共同研究を行った。

(4) 国内外で開催された学術研究集会にできる限り参加して研究課題に関する情報を交換し、各国からの関連研究者との討議・

討論を行った。

(5) また日常的に、インターネットを通して、あるいは研究機関において購入している学術雑誌掲載の学術論文を通して最新の研究情報を収集し、研究図書によって専門知識を習得した。

4. 研究成果

(1) シュレーディンガー方程式の基本解について、調和振動子の適当な符号条件をみたく一次関数よりも早く増大するポテンシャルによる摂動の基本解は、共鳴時間において、空間変数に関して、摂動の強さに応じた速度で空間無限遠方において増大することを示した。これは二次関数的増大を示すポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素の基本解が無限遠方で増大することが示された初めての例である。磁場を持つ場合の基本解の有界性の問題は今後の課題である。

(2) シュレーディンガー方程式の超局所特異性の伝播問題に関して逐次波面集合の概念を導入するとともに、散乱理論の考え方を導入して特異性伝播問題を定式化し、準古典解析の手法を用いて超局所特異性を決定する全く新しい研究手法を編み出し、平坦計量の短距離型あるいは長距離型摂動のシュレーディンガー方程式、散乱多様体上のシュレーディンガー方程式、あるいは調和振動子の摂動方程式の解の特異性の伝播問題を解決した。さらに同様な考え方に解析的超局所解析の手法を組み合わせる平坦計量の短距離型あるいは長距離型摂動のシュレーディンガー方程式の解析的特異性を決定した。また、この手法をさらに発展させて、変数係数シュレーディンガー方程式の初期値問題の基本解を自由シュレーディンガー方程式の基本解とフーリエ積分作用素の積として書き表すことに成功した。これらはこれからのこの方面の研究に大きな影響を及ぼすものと考えられる。

(3) 散乱の波動作用素はシュレーディンガー作用素が連続スペクトルの下端において特異性を持つ場合にも、空間次元が2, 4以外の場合でも指数が空間次元の半分とその双対指数の間にある指数をもつルベグ空間あるいはソボレフ空間において有界であることを示した。さらに空間4次元の場合にも、特異性が零固有値によるものであれば、波動作用素はより制限された指数をもつルベグ空間あるいはソボレフ空間においては有界であることを示した。これは研究代表者の「連続スペクトルの下端が正則であれば波動作用素はすべての指数のルベグ空間あるいはソボレフ空間において有界である」という結果の拡張であり、非線形方程式の

研究に重要な分散型評価を得る手段としても重要である。困難な問題として残された、4次元空間のより一般的な特異性の場合、および2次元空間の場合の解決が今後の課題である。

(4) シュレーディンガー作用素のスペクトル・シフト関数のルベーグ・ノルムによる評価の方法を開発して、ランダムシュレーディンガー作用素に適用し、状態密度関数に対する新しい評価を与えた。また不定符号のポテンシャルをもつ Anderson 型のランダムシュレーディンガー作用素に関してエネルギーの下限での Lifshitz 特異性の存在を示した。これはこれまで、おおむねポテンシャルが正值な場合に限られていた Anderson 局在の問題の研究に、多大の影響を与え転機をもたらすものと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 27 件)

(1) A. Jensen, K. Yajima, Spatial growth of fundamental solutions for certain perturbations of the harmonic oscillator, Review in Mathematical Physics, 査読有, 22 (2010), 193--206.

(2) S. Nakamura, Semiclassical singularity propagation property for Schroedinger equations. Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, 61 (2009), 177--211.

(3) F. Klopp, S. Nakamura, Spectral extrema and Lifshitz tails for non monotonous alloy type models. Commun. in Mathematical Physics, 査読有, 287(2009), 1133--1143.

(4) A. Martnez, S. Nakamura, B.V.Sordoni, Analytic wave front for solutions to Schroedinger equation, Advances in Mathematics, 査読有 222 (2009), 1277-1307.

(5) K. Ito, S. Nakamura, Singularities of solutions to Schroedinger equation on scattering manifold. American Journal of Mathematics, 査読有, 131 (2009), 1835-1865.

(6) S. Nakamura, Wave front set for solutions to Schroedeinger equations,

Journal of Functional analysis, 査読有, 256 (2009), 1299--1309.

(7) A. Jensen and K. Yajima, On L^p boundedness of wave operators for 4-dimensional Schroedinger operators with threshold singularities, Proceedings of London Mathematical Society (3), 査読有, 96(2008), 136--162.

(8) A. Martinez, S. Nakamura, V. Sordoni, Analytic singularities for long range Schroedinger equations Comptes Rendus Mathematiques, 査読有, 346 (2008), 859-852.

(9) N. Kumano-go, D. Fujiwara, Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semi-classical approximations, Bulletin des Sciences Mathematiques, 査読有, 132 (2008), 313--357.

(10) N. Kita, A. Shimomura, Asymptotic behavior of solutions to Schroedinger equations with a subcritical dissipative nonlinearity, Journal of Differential Equations, 査読有, 242(2007)

(11) A. Shimomura, Scattering theory for the Schroedinger-improved Boussinesq system in two space dimensions, Asymptotic Analysis, 査読有, 51 (2007) 167--187

(12) M. Kadowaki, K. Watanabe, Non-selfadjoint perturbation of Schroedinger and wave equations, Advanced Studies and Pure Mathematics, 査読有, 47 (2007), 137--157.

(13) K. Yajima, The L^p boundedness of wave operators with threshold singularities I, Odd dimensional case, Journal of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 査読有, 13 (2006), 43-93.

(14) D. Finco, K. Yajima, The L^p boundedness of wave operators with threshold singularities II, Even dimensional case Journal of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 査読有, 13 (2006), 277-346.

(15) A. Martinez, S. Nakamura, V. Sordoni, Analytic smoothing effect for the

Schroedinger equations with long range perturbation, Communications in Pure and Applied Mathematics, 査読有, 59 (2006), 1330-1361.

(16) D. Hundredmark, R. Killip, S. Nakamura, P. Stollmann, I. Veselic, Bounds on spectral shift functions and the density of states, Communications in Mathematical Physic, 査読有, 262(2006)

(17) A. Shimomura, Asymptotic behavior of solutions of Schroedinger equations with dissipative nonlinearities, Commun. in Partial Differential Equations, 査読有, 31 (2006), 1407-1423.

(18) A. Shimomura, Y. Tsutsumi, Nonexistence of scattering states for some quadratic nonlinear Schroedinger equation in two space dimensions, Differential and Integral Equation, 査読有, 19 (2006), 1047-1060.

(19) D. Fujiwara, N. Kumano-go, An improved remainder estimates of stationary phase method for some oscillatory integrals over a space of large dimensions, Funkcilaj Ekvacioj, 査読有, 49 (2006), 59-86.

(20) D. Fujiwara, N. Kumano-go, The second term of semi-classical expansion for Feynman path integrals with integrand of polynomial growth, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, 58 (2006), 847-867.

[学会発表] (計 39 件)

(1) S. Nakamura, Remarks on scattering theory for Schrödinger operators on scattering manifolds, Spectral Problems for Quantum Hamiltonians, 2010年2月22日, Centre Interfacultaire Bernoulli, EPFL, Lausanne,

(2) S. Nakamura, Remarks on Fundamental Solutions to Schroedinger Equation with Variable Coefficients, Spectral and Dynamical Properties of Quantum Hamiltonians, 2010年2月16日, Centre Interfacultaire Bernoulli, EPFL, Lausanne

(3) 藤原大輔, 大次元空間上での停留位相法の剰余項評価とその経路積分への応用,

Encounter with Mathematics, 2010年1月8日, 中央大学理工学部

(4) S. Nakamura, Lifshitz tails for Schroedinger operators with non-sign definite random potentials", "Modeling and Understanding Random Hamiltonians: Beyond Monotonicity, Linearity and Independence, 2009年12月8日 Oberwolfach Mathematics Institute

(5) 谷島賢二、調和振動子のある種の摂動の基本解、京都大学数理解析研究所研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」、2009年12月4日、京都大学人間環境学部

(6) 谷島 賢二、On fundamental solution of Schroedinger equations 研究集会 [Stochastic Problems and Nonlinear PDE]、2009年12月1日京都大学理学部

(7) S. Nakamura, Remarks on scattering theory on scattering manifolds Colloque Franco-Tunisien, d'equation aux derives parielles, 2009年9月28日, Hammamet, Tunisia,

(8) 谷島 賢二、シュレーディンガー方程式の分散型評価、日本数学会秋季総合分科会「秋季賞受賞講演」、2009年9月25日、大阪大学豊中キャンパス

(9) 中村 周、シュレーディンガー発展方程式の基本解について、2009年9月21日、大阪電気通信大学

(10) 藤原大輔、Feynman経路積分の伊藤先生による定式化について、伊藤清先生文化勲章祝賀講演会、2008年12月14日、京都大学数理解析研究所

(11) 藤原 大輔、The second term of the semi-classical asymptotic expansion for Feynman path integrals with integrand of polynomial growth, Spectral Theory and Partial Differential equations, 2008年11月21日, Copenhagen 大学

(12) Kenji Yajima, Review of the fundamental solution to Schroedinger Equation, Mathematical Horizon of Quantum Physics, 2008年9月9日, Singapore 国立大学

(13) Kenji Yajima, On fundamental solution of Schroedinger equations, Meccanica, A conference in honor of S. Graffi's 65-th birthday, 2008年8月27日, Bologna 大学

(14) Kenji Yajima, The L^p boundedness of wave operators for Schroedinger Operators, 35-th Journées equations aux derives partielles, 2008年6月3日, Evian

(15) Kenji Yajima, Unboundedness of the fundamental solution for some perturbations of harmonic oscillators, レンヌ大学解析セミナー, 2008年5月25日, Rennes University

(16) K. Yajima, Topics of Schroedinger operators, SISSA (Trieste Italy), Mathematical Physics Seminar, 2007年5月6日, SISSA, Trieste

(17) K. Yajima, Lectures on topics of Schroedinger operators Lecture Series of Instituto d'Alta Matematica, 2007年5月4日, University Rome I

(18) K. Yajima, Existence of solution of Schroedinger operators, Mathematical Physics Seminar, 2007年4月13日, University of Bologna

[図書] (計1件)

谷島 賢二、シュプリンガー・ジャパン、応用解析ハンドブックのうち「Schroedinger方程式」の項, 2009年, 577-629

6. 研究組織

(1) 研究代表者

谷島 賢二 (YAJIMA KENJI)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号: 80011758

(2) 研究分担者

藤原 大輔 (FUJIWARA DAISUKE)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号: 10011561

(H21: 連携研究者)

中村 周 (NAKAMURA SHU)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 50011758

(H20-21: 連携研究者)

水谷 明 (MIZUTANI AKIRA)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号: 80011716

(H20-21: 連携研究者)

渡辺 一雄 (WATANABE KAZUO)

学習院大学・理学部・助教

研究者番号: 90260851

(H20-21: 連携研究者)

下村 明洋 (SHIMOMURA AKIHIRO)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号: 00365066

(3) 連携研究者

()

研究者番号: