

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18340042

研究課題名(和文) 連続体现象における非線形諸問題の数学解析

研究課題名(英文) Mathematical Analysis of various nonlinear problems
for phenomena in continua

研究代表者

谷 温之(TANI ATUSI)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：90118969

研究成果の概要：

連続体および連続体近似できる自然現象の数理モデル方程式を数学解析し、次のような研究成果が得られた(主要なもののみ記す)。

(1) Navier-Stokes 方程式, Stokes 方程式に対して, 区分的に連続な境界を持つ領域, 角領域での強解の一意存在; (2) Navier-Stokes 方程式に対して, 滑り境界条件(Navier 型, 閾値型)下での強解の一意存在; (3) 水の波(渦なし非圧縮 Euler 方程式の自由境界問題)の長波近似, 浅水波近似の正当化; (4) 自己重力作用下での流体星(化学的に活性な圧縮性粘性流体)の1次元問題および3次元球対称問題の滑らかな時間大域解の一意存在; (5) 弾性体に対するいくつかの亀裂問題の可解性。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2007年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2008年度	2,700,000	810,000	3,510,000
年度			
年度			
総計	8,500,000	2,550,000	11,050,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：Navier-Stokes equations, Stokes equations, water waves, free boundary problem, slip boundary conditions, crack problem, domain with piecewise continuous boundary,

1. 研究開始当初の背景

近年数物系科学において、実現象の解明を目的に、「複雑現象の数理解析」の名の下に、研究が精力的に行われてきた。その方法はコンピュータを用いた数値的手法が主流である。しかし、モデル化の妥当性を厳密に吟味する

ためには、数学理論が欠かせない。このような状況を踏まえ、連続体および連続体近似が可能な諸現象の基礎方程式系を解析学および関連する数学、コンピュータ科学を駆使し、周辺諸問題を含めた、それらの可解性と同時に、将来の新しい諸現象の

数学解析に必要となる新しい数学基礎理論・方法の構築を目指した。

2. 研究の目的

連続体および連続体近似できる自然現象を、その数理モデル方程式を数学解析することにより解明することが研究の目的である。研究対象としている具体的な問題は以下の通りである。

(I) 気体・液体の基礎方程式系, (II) 固体の基礎方程式系, (III) 非ニュートン流体の基礎方程式系, (IV) 非線形音響学におけるの基礎方程式系, (V) 非線形力学におけるの基礎方程式系, (VI) その他の非線形問題。

特にそれらの自由境界問題および滑り境界値問題を中心に、その最も根源的問題である well-posedness についての研究が主たる目的である。

3. 研究の方法

上記問題 (I)-(VI) を数学解析することが目的であるが、単なる数学的議論の展開ではなく、それぞれの現象に基づいた、現象論的に意味のある問題設定の上で、数学解析することを目指した。そのため、物理学分野における研究者との研究連絡・討論を含めた交流を頻繁に行い、物理学における専門誌を常時座右に置き、また海外研究協力者との研究連絡を密接にとりながら研究を進めた。

研究方法としては、各分担者が独立して各自の研究を進め、定期的な情報を交換しながら、研究を進めた。数学上の方法としては、数学解析が主要な道具で、種々の数学解析理論、特に偏・常微分方程式論、積分方程式論、特異積分作用素論、関数解析等が用いられる。主要な数学的方法は、次の通りである。

- (1) 自由境界問題: 非線形性が高くなるが、Lagrange 座標系を用いて、未知領域を既知領域に変換してから議論を展開することが、この問題に対しては有効である。
- (2) 区分的に連続な境界を持つ領域、角領域での問題: Mellin 変換を用いて、重み付き解空間を用いる。
- (3) 滑り境界問題: これまでの偏微分方程式論における主要部の考え方の変更が必要で、新しい視点から理論の構築を行った。
- (4) 亀裂問題: 強解の場合は、特異積分を含む積分方程式論が主要な道具で、繊細な計算を要する。弱解の場合は、変分法が主要な道具である。
- (5) 長波近似、浅水波近似の正当化: 無次元パラメータの導入と、それに対する一様 a priori 評価が重要で、その計算は膨大

なものになる。

- (6) 時間大域解: 小ささを仮定しない滑らかな解の時間大域解を求めることは通常非常に困難な問題である。Sobolev-norm による a priori 評価を用いて Hoelder-norm での a priori 評価を求めた。

4. 研究成果

上記問題 (I)-(VI) に分けて記す。

(I) ① 区分的に連続な境界を持つ領域における非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する定常問題の強解の一意存在を証明した。非定常問題の可解性証明の準備として、パラメータを含む定常問題を角領域で解いた。この際、圧力項の低階導関数の評価が重要であり、この評価は解の具体的な表現式が得られる。これらの結果は、世界的数学者 Sobolev の生誕 100 年記念 Conference および Texas A&M 大学におけるセミナーで講演し、注目を引いた。

② 非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する定常問題を一般化された Navier 型滑り境界条件、閾値型滑り条件の下で、その一意可解性の証明をした。この問題は非 Newton 流体に対して、その重要性が指摘されていて、工学上特に重要である。

③ 非圧縮 Euler 方程式(渦あり)に対する自由境界問題の周期解の構成を行った。非圧縮 Euler 方程式に対する自由境界問題の研究は、世界に先駆け、代表者周辺で始まり、最近海外でも研究が現れてきた。水の波(渦なし非圧縮 Euler 方程式の自由境界問題)に関しては、長波近似、浅水波近似の正当化を証明した。これまでに長波モデル方程式、浅水波モデル方程式を基礎方程式から無次元化により厳密に導いた初めての結果である。

④ 自己重力作用下での流体星(化学的に活性な圧縮性粘性流体)の運動と形状決定問題のうち、1次元問題および3次元球対称問題の滑らかな時間大域解の一意存在を証明した。データおよび解の小ささを仮定しないで、滑らかな解の時間大域解を求めることは非常に困難な問題で、殆どの結果が物理的に妥当でない仮定の下で議論されている。ここでは、Hoelder-norm での a priori 評価が Sobolev-norm による a priori 評価を用いて求められている。この結果は国際会議で講演し、注目を集めた。現在同じ状況下で、化学的に非活性流体の時間大域解が真に時間無限大まで存在し、平衡状態に達することの証明に成功し、草稿準備中である。これは外圧に条件が付くものの非常に良い結果と思っている。

⑤ 衝撃波方程式についての解析は、その物理的性質により、有界変動関数空間で解を構成する。証明方法は、Glimm 差分を用いるか、放物正則化を用いるかの2通りある。後者の

方法を用いて、証明に成功した。この結果は、証明のシナリオは公表されていたにも拘らず、これまで誰も成功しなかったものである。

(II) ① 物体の感度解析に関わる形状微分を考察した。半無限き裂を含む無限帯領域における線形弾性体媒質において、この半直線き裂のある角度方向への平行移動による形状微分をポテンシャル法により算出した。

② 非破壊検査に関わる線形弾性体における境界値逆問題を考察した。具体的には2次元等方および非等方均質線形弾性体において、き裂が線状でその端点のひとつが、物体表面上の既知の点であるという仮定のもとで、もう一つの未知の端点を、表面における‘うまく制御された’応力と対応する変位との一組のデータから決定する公式を確立した。その際、対応する順問題（境界値問題）の解のき裂先端における級数展開が重要な役割を果たし、その厳密な収束証明も与えた。

③ 破壊力学における亀裂進展問題をうち、進展方向決定問題とキック問題等について変分不等式を用いて解決した。

(III) 粉粒体を流体的物体とみなすと、非ニュートン流体として扱える。1900年初頭のKortewegの時代からそのように考えられてきた。この様な流体に対する通常の粘着境界値問題、Navier型の滑り境界値問題の強解の一意存在を証明した。これらの結果は国際会議で講演し、初めての強解に対する結果として評価された。またこれら論文は現在投稿中である。さらに、セカンドグレード、サードグレードと呼ばれる非ニュートン流体に対する滑り境界値問題についても、論文草稿を準備している。

(IV) 非線形音響学における基礎方程式系としては、Zabolotskaya-Khokhlov方程式、Kuznetsov方程式が有名であるが、これまでの研究では解の定性的性質は研究されているが、一番大事な解の一意存在についての結果は乏しい。これら方程式の初期-境界値問題の可解性を確立した。現在論文草稿の準備中である。この他、非線形音響学におけるの基礎方程式系の圧縮Navier-Stokes方程式系からの導出について考察中である。

(V) 非線形力学における非線形問題については、現在研究継続中である。具体的には、先端に磁石を有する複数の振り子から成る磁氣的連鎖系モデルを考え、その理論解析を通して、運動方程式を導出し、その連続体近似を行い非線形振幅方程式を得た。この方程式について、振り子の間隔や初期振幅をパラメータとして、ソリトン解(ダークソリトン、包絡ソリトンなど)の存在と、それらの安定性について考察中である。

(VI) その他の非線形問題については次のような研究結果および研究継続中である。

① トカマク内におけるプラズマの drift-

wave 乱流を記述する2流体モデル方程式系の初期-境界値問題の強解が時間大域的に一意存在すること、及びその解がある時間内ではHasegawa-Wakatani方程式の同じ初期-境界値をとる問題の強解に一樣収束することを証明した。さらに、Hasegawa-Wakatani方程式の解が1流体モデル方程式であるHasegawa-Mima方程式の解に収束することも証明した。この結果は国際会議で講演し、現在投稿中及び投稿準備中である。

② 濾過現象は擬放物型偏微分方程式で記述される。この方程式の主要項には未知係数(流れの構造を決定する係数)を含んでいる。つまり逆問題となっている。1次元の場合、解の一意存在と、もう一つの主要項の係数の零極限をとることにより、放物型偏微分方程式の解が得られることを証明した。この結果は国際会議で講演し、現在投稿中である。さらに3次元擬放物型偏微分方程式の逆問題についても解の存在と正則性は証明でき、投稿準備中である。放物型偏微分方程式の解への収束については、現在考察中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 23 件)

1. S. Itoh, N. Tanaka and A. Tani, On some boundary value problem for the Stokes equations with a parameter in an infinite sector. To appear in the special volume of the series “Advances in Mathematical Fluid Mechanics” dedicated to the memory of Professor Alexander Kazhikhov edited by A. Fursikov, G.P. Galdi and V.V. Puchnachov, Birkhauser. 2009. (査読有)

2. X.-X. Guo, G.-R. Liu and A. Tani, An Adaptive Gradient Smoothing Method (GSM) For Fluid Dynamics Problems. To appear in Intern. J. Numer. Meth. Fluids (2009). (査読有)

3. T. Iguchi, A shallow water approximation for water waves, to appear in J. Math. Kyoto Univ. 2009. (査読有)

4. S. Itoh, N. Tanaka and A. Tani, Some estimates of pressure for the Stokes equations in an infinite sector. Proc. Japan Acad., **85**, Ser. A (2009), 37-40. (査読有)

5. S. Itoh, N. Tanaka and A. Tani, Steady solution and its stability to Navier-Stokes equations with general Navier slip boundary condition. Zap. Nauchn. Semin. POMI, **362**(2009), 153-175. (査読有)

6. K. Ohi and T. Iguchi, A two-phase problem for capillary-gravity waves and the

- Benjamin-Ono quation, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **23** (2009), 1205—1240. (査読有)
7. M. Umehara and A. Tani, Global solvability of the free-boundary problem for one-dimensional motion of a self-gravitating viscous radiative and reactive gas. *Proc. Japan Acad.*, **84**, Ser. A (2008), 122-127. (査読有)
8. A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenکو and A. Tani, Evolution of a crack with kink And non-penetration. *J. Math. Soc. Japan*, **60**(2008), 1219-1253. (査読有)
9. A. M. Khludnev and A. Tani, Unilateral contact problems for two inclined elastic bodies. *Europ. J. Mech. A-Solids*, **27**(2008), 365-377. (査読有)
10. A. M. Khludnev and A. Tani, Overlapping domain problems in the crack theory with possible contact between crack faces. *Quart. Appl. Math.*, **66**(2008), 423-435. (査読有)
11. M. Umehara and A. Tani, Global solution to the equations for a spherically symmetric viscous radiative and reactive gas over the rigid core. *Anal. Appl.*, **6** (2008), 183-211. (査読有)
12. M. Ikehata and H. Itou, Enclosure method and reconstruction of linear crack in an elastic body. *J. Phys.: Confer. Series*. **135**(2008), 012052-012059. (査読有)
13. M. Ikehata and H. Itou, An inverse problem for a linear crack in an anisotropic elastic body and the enclosure method. *Inverse Problems*, **24**(2008), 025005-02525. (査読有)
14. S. Itoh, N. Tanaka and A. Tani, Steady Navier-Stokes equations in a domain with piecewise smooth boundary. *Comput. Math. Appl.*, **53**(2007), 685-691. (査読有)
15. M. Umehara and A. Tani, Global solution to the one-dimensional equations for a self-gravitating viscous radiative and reactive gas. *J. Differential Equations*, **234**(2007), 439-463. (査読有)
16. C. Le Roux and A. Tani, Steady solutions of the Navier-Stokes equations with threshold slip boundary conditions. *Math. Methods Appl. Sci.*, **30**(2007), 595-624. (査読有)
17. T. Iguchi, A long wave approximation for capillary-gravity waves and the Kawahara equation, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, **2**(2007), 179-220. (査読有)
18. T. Iguchi, A long wave approximation for capillary-gravity waves and an effect of the bottom, *Comm. Partial Differential Equations*, **32** (2007), 37--85. (査読有)
19. M. Ikehata and H. Itou, Reconstruction of a linear crack in an anisotropic elastic body from a single set of measured data. *Inverse Problems*, **23**(2007), 589-607. (査読有)
20. S. Itoh, N. Tanaka and A. Tani, On some boundary value problem for the Stokes equations in an infinite sector. *Anal. Appl.*, **4**(2006), 357-375. (査読有)
21. H. Itou and A. Tani, Shape derivative of energy functional in an infinite elastic strip with a semi-infinite cracks. *Tokyo J. Math.*, **29**(2006), 385-397. (査読有)
22. H. Morioka and A. Tani, Finite difference schemes for a certain nonlinear parabolic system. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, **16**(2006), 679-699. (査読有)
23. T. Iguchi, A mathematical justification of the forced Korteweg-de Vries equation for capillary-gravity waves, *Kyushu J. Math.*, **60** (2006), 267--303. (査読有)
- [学会発表] (計 5 件)
1. A. Tani, The Stokes equations in a domain with piecewise smooth boundary. International Conference on "Differential equations, Function spaces, Approximation theory" dedicated to 100th anniversary of the birthday of Sergei L. Sobolev, October 10, 2008, Novosibirsk, Russia.
2. A. Tani, Initial-boundary value problem for the motion of incompressible inhomogeneous fluid-like bodies. "Parabolic and Navier-Stokes Equations 2008 in honour of V.A. Solonnikov", September 1, 2008, Mathematical Research and Conference Center, Bedlewo, Poland.
3. A. Tani, Temporally Global Solution to the Equations for a Spherically Symmetric Viscous Radiative and Reactive Gas over the Rigid Core. International Conference on "Modern problems of Mathematical Modelling and Computational Technologies-2008", August 22, 2008, Krasnoyarsk, Russia.
4. A. Tani, Initial boundary value problem for the resistive drift wave turbulence. International Conference on "Inverse and Ill-posed problems of Mathematical Physics" dedicated to Professor M.M. Lavrent'ev on occasion of his 75-th birthday, August 23, 2007, Novosibirsk, Russia.
5. A. Tani, Mathematical problems for the primitive equations. Workshop on

Mathematical Analysis on Nonlinear
Phenomena, December 21, 2006, Yokohama,
Japan.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

谷 温之 (TANI ATUSI)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：90118969

(2) 研究分担者

前島 信 (MAEJIMA MAKOTO)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：90051846
下村 俊 (SHIMOMURA SHUN)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：00154328
野寺 隆 (NODERA TAKASHI)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：50156212
田村 明久 (TAMURA AKIHISA)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：50217189
吉沢 正紹 (YOSHIZAWA MASATSUGU)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：10095664
石川 史郎 (ISHIKAWA SHIRO)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：10051913
井口 達雄 (IGUCHI TATSUO)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：20294879
高山 正宏 (TAKAYAMA MASAHIRO)
慶應義塾大学・理工学部・助教
研究者番号：90338252
杉浦 壽彦 (SUGIURA TOSHIHIKO)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：70265932
(2007 年度～2008 年度)

(3) 連携研究者

伊藤 成治 (ITO SHIGEHARU)
弘前大学・教育学部・教授
研究者番号：40193487
田中 尚人 (TANAKA NAOTO)
福岡大学・理学部・准教授
研究者番号：00247222
伊藤 弘道 (ITOU HIROMICHI)
群馬大学・工学部・助教
研究者番号：30400790