

平成 22 年 6 月 9 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2006～2009

課題番号：18340043

研究課題名 (和文) 実関数論の手法による調和解析とその応用

研究課題名 (英文) Harmonic analysis by real variable methods and its applications

研究代表者

宮地 晶彦 (MIYACHI AKIHIKO)

東京女子大学・現代教養学部・教授

研究者番号：60107696

研究成果の概要 (和文): フェファーマン スタインによるハーディー空間と同様の性質を持つ関数空間をユークリッド空間の領域上に導入し, その性質を確立した. この関数空間は, 或る条件をみだす微分同相写像の定める変数変換によって, 同種の関数空間に変換されるという性質を持つ. この関数空間を古典的直交級数の研究に応用した. 時間周波数解析など実関数論的調和解析に現れるいくつかの関数空間の性質を調べ, それらの空間での作用素についての結果を得た.

研究成果の概要 (英文): We introduced a function space on a domain of the Euclidean space and established its fundamental properties. The function space has several properties similar to the Hardy space on the whole Euclidean space introduced by Fefferman and Stein. In particular, we showed that the change of variables defined through diffeomorphisms, with certain properties, of the basic domains transforms the function space into another function space of the same kind. We used the function space to study classical orthogonal series. We investigated several other function spaces used in the field of time-frequency analysis and obtained several results concerning the operators acting in those spaces.

交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	3,300,000	990,000	4,290,000
2007年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2008年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2009年度	3,100,000	930,000	4,030,000
年度			
総計	12,400,000	3,720,000	16,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：実解析, 調和解析, 関数空間, 直交級数, 特異積分, ハーディー空間

1. 研究開始当初の背景

(1) 異なる 2 つの正規直交関数系間の移植作用素の研究は, ポラールやアスキーらによ

ってヤコビ多項式から定まる区間(0,)上の正規直交関数系(ヤコビ関数系)等の場合に, 古くは 1960 年代から研究された. マッケン

ハウプトは 1986 年の論文で、ヤコビ関数系
の間の移植作用素が、区間(0,)上の重み付
きルベグ空間において有界作用素になる
場合を詳しく調べた。研究代表者は 2004 年
に発表した論文で、区間(0,)上の重み付き
測度に関するハーディー空間を用いれば、マ
ッケンハウプトの結果の一部が拡張できる
ことを示した。その結果を更に一般化できる
こともほぼ確認していた。

マッケンハウプトとスタインは 1965 年の
論文で、ヤコビ関数系の特殊の場合である超
球多項式を用いて複素解析関数の理論と同
様の関数理論を展開し、超球多項式系に関
係した共役関数を導入して、古典的なフー
リエ級数論のリースの不等式と同様な不等
式が成り立つことなど、ルベグ空間 L_p を
用いた理論を展開した。研究代表者は 2005
年頃に、ヤコビ関数系の移植定理に用いた
重み付きハーディー空間を用いて、マッケ
ンハウプトとスタインの理論をハーディー
空間 H_p に拡張することについて、部分的
な結果を得ていた。

(2) 1970 年代初めにフェファーマンと
スタインがユークリッド空間上に実関数論
的な方法でハーディー空間を導入して以来、
フェファーマン・スタインのハーディー空
間の様々の特徴付けや、そのハーディー空
間の特異積分作用素の性質などが、盛んに
研究された。研究代表者は 1990 年の論文
で、ユークリッド空間の領域上に実関数論
の方法でハーディー空間を導入し、その基
本的な性質を確立した。チャン・クランツ
・スタインは 1993 年の論文で、滑らかな
境界を持つユークリッド空間の有界領域上
に実関数論的な 2 種類のハーディー空間を
導入し、その領域でのポアソン方程式の
ディリクレ境界条件またはノイマン境界
条件の下での解が、そのハーディー空間
において適切な評価をみとすことを示した。
スタインらの結果は滑らかな境界を持つ
領域に限られていたが、ミトレアとメイ
ボロダは 2004 年に、スタインらの結果
をリプシッツ境界を持つ領域へ一般化
した。

(3) 分担者の佐藤秀一は 2000 年代初
めに、カルデラン・ジグムント型特異積
分作用素で積分核が十分な滑らかさを
持たない場合(ラフな積分核と呼ばれる)
を研究し、そのような特異積分作用素
から定義されるリトルウッド・ペー
リー関数やユークリッド空間内の多
様体に沿った特異積分などについて
多くの結果を得ていた。

2. 研究の目的

(1) ヤコビ関数系について 2005 年頃
までに研究代表者の得ていた結果は、1
次元の場合

ではあるが、領域上の重み付きのハー
ディー空間において特異積分作用素が有
効に作用することを示したものである。ユ
ークリッド空間の一般の領域においても、
その上の或る条件(2 倍条件に相当する
条件)をみとす一般的な測度に関するハ
ーディー空間を導入し、そのハーディー
空間の性質を調べ、さらに、その空間
での特異積分作用素の有界性を確立し
たい、と考えた。とくに、ユークリッド
空間のひとつの領域を適当な条件をみ
とす微分同相写像によって別の領域に
移すとき、その同相写像による変数変
換によって領域上のハーディー空間に
引き起こされる変換の性質を確立する
こと、さらにそのハーディー空間を用
いて、ミトレアらの結果を重み付きの
場合に拡張すること、を目標とした。

(2) ヤコビ関数系に対する移植作用素
の有界性に関する結果では、マッケン
ハウプトの結果でも研究代表者の結果
でも、パラメーターの或る離散的な値
が例外になっている。この例外の場合
に移植作用素の有界性を示すことを
ひとつの課題として設定した。

さらに、超球多項式系に関するマッケ
ンハウプトとスタインの解析関数系に
対して研究代表者が得ていた結果は
パラメーターの範囲に制限がついて
いたので、この制限をはずして、
パラメーターの全範囲で同様の結果
を得たいと考えた。さらに、その解
析関数系に関するハーディー空間の
詳しい性質を得たいと考えた。

(3) 実関数論的調和解析で重要である
特異積分作用素と関数空間の研究を
広げること、ひとつの研究課題とし
た。特に、佐藤秀一が 2000 年代初
めまでに進めていたラフな積分核
を持つ特異積分作用素の性質の研究、
時間周波数解析に現れるモデュ
レーション空間の性質の研究、
モデュレーション空間における
特異積分作用素や擬微分作用素の
性質の研究、重み付きの関数空間
の研究、などを深めることを課題
とした。

3. 研究の方法

(1) 最大関数を用いる実関数論の
方法によってユークリッド空間の
領域上で重み付きのハーディー
空間を定式化し、アトム分解や
変数変換などの基本的な性質を
確立する。

(2) 楕円型偏微分方程式の境界
値問題に重み付きハーディー
空間を応用して、方程式の解
の新しい評価を示す。

(3) 関数のフーリエ変換を分割
することによって定義される
モデュレーション空間の性質
を調べ、フーリエ乗子作用素
や擬微分作用素の有界性や
コンパクト性などの性質の研

究に応用する。

(4) 積分核が滑らかさを持たない場合の特異積分作用素や、同様の核を用いて定義されるリトルウッド・ペーリー関数、ユークリッド空間の多様体に沿った特異積分など、一般的な特異積分作用素の性質を調べる。

4. 研究成果

(1) 領域上のハーディー空間の研究では、領域上に境界で0になる正値のリプシッツ連続関数が与えられたとき、その関数に付随した最大関数を用いて領域上に重み付きハーディー空間を導入した。このハーディー空間について、アトム分解による特徴づけ、変数変換や関数の掛け算に関する性質など、基本的な性質を確立した。このハーディー空間を用いて、ヤコビ級数の移植定理に関する結果を整備した。さらに、或る条件をみたす微分同相写像による変数変換は、この重み付きハーディー空間を同種の重み付きハーディー空間に移すことを示した。

(2) 超球多項式系に関する解析関数系に対して研究代表者が得ていた結果でパラメータについていた制限をはずす問題は、解決できなかった。実関数論の方法だけでは、技術的に難しい点がたくさんあり、複素関数論的な方法や確率過程を利用した方法などを試みる必要がありそうである。また、その解析関数系に関するハーディー空間の詳しい性質の解明にも至らなかった。

(3) 楕円型偏微分方程式の境界値問題に重み付きハーディー空間を応用する研究では、基本的には1変数の直交級数の研究に用いた方法が利用できることが予想されたが、具体的な成果を得るまでには至らなかった。現在も研究を進めている。特に、領域の境界が滑らかでない場合について、ハーディー空間の性質を保存する変数変換を構成したり、偏微分作用素の解を表示する積分核の精密な評価をしたりすることなどに、困難な問題点がいくつかある。

(4) モデューション空間の性質を調べ、局所ハーディー空間とモデューション空間との間に埋め込みが成り立つパラメータの範囲を決定した。さらに、実関数論の振動積分の評価法を用いてシュレーディンガー型のフーリエ乗子作用素を調べ、その作用素がモデューション空間で有界となるパラメータの範囲を決定した。また、擬微分作用素の研究に、モデューション空間とウェーブレット理論のガボール・フレームを利用して、擬微分作用素がシャッテン族に属するための条件としてこれまでに知られていた条件を

改良した。

(5) 一般的な特異積分の性質の研究では、研究分担者の古谷康雄(小森康雄)と佐藤秀一(2006 - 2007 に研究分担者、その後は連携研究者)を中心とした研究により、ある種の曲面に沿った特異積分、特異ラドン変換の性質の解明、特異積分の最大作用素の重み付き評価、モーレー空間やヘルツ空間での特異積分作用素の評価、特異積分作用素と掛け算作用素の交換子の研究、などに成果があった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計18件)

(1) Yasuo Komori-Furuya(古谷康雄), A note on weight classes of Muckenhoupt type on nondoubling measure spaces, Georgian Mathematical Journal, 掲載確定(巻・号未定), 査読有。

(2) Yasuo Komori(古谷康雄) and K. Matsuoka, Some weak-type estimates for singular integral operators on CMO spaces, Hokkaido Mathematical Journal, Vol.39, 2010, 掲載確定(ページ数未定), 査読有。

(3) A.Miyachi, F.Nicola, S.Rivetti, A.Tabacco, and N.Tomita, Estimates for unimodular Fourier multipliers on modulation Spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.137, 2009, pp.3869 - 3883, 査読有。

(4) A.Miyachi, Change of variables for weighted Hardy spaces on a domain, Hokkaido Mathematical Journal, Vol.38, 2009, pp.519 - 555, 査読有。

(5) Elijah Liflyand and Akihiko Miyachi, Boundedness of the Hausdorff operators in H_p spaces, $0 < p < 1$, Studia Mathematica, Vol.194, 2009, pp.279 - 292, 査読有。

(6) M.Kobayashi, A.Miyachi, and N.Tomita, Embedding relations between local Hardy and modulation spaces, Studia Mathematica, Vol.192, 2009, pp.79 - 96, 査読有。

(7) Yasuo Komori(古谷康雄) and S.Shirai, Weighted Morrey spaces and a singular integral operator, Mathematische Nachrichten, Vol.282, 2009, pp.219 - 231, 査読有。

(8) Y.Komori(古谷康雄) and K.Matsuoka, Boundedness of several

operators on weighted Herz spaces, Journal of Function Spaces and Applications, Vol.7, 2009, pp.1 - 12, 査読有 .

(9) Y. Komori (古谷康雄), Calderon's commutator on $H_p(\mathbb{R}^n)$, Int. J. Pure. Appl. Math., Vol.47, 2008, pp.225-234. 査読有 .

(10) Yasuo Komori (古谷康雄), The Cauchy integral operator on Hardy space, Hokkaido Mathematical Journal, Vol.37, 2008, pp.389 - 398, 査読有 .

(11) Shuichi Sato, Weighted estimates for maximal functions associated with Fourier multipliers, Studia Sci. Math. Hungarica, Vol.44, 2007, pp.317 - 330, 査読有 .

(12) Shuichi Sato, Non-regular pseudo-differential operators on the weighted Triebel-Lizorkin spaces, Tohoku Mathematical Journal, Vol.59, 2007, pp.323 - 339, 査読有 .

(13) Akihiko Miyachi, Transplantation theorem for Jacobi series in weighted Hardy spaces, II, Mathematische Annalen, Vol.336, 2006, pp.111 - 153, 査読有 .

(14) Akihiko Miyachi, Weighted Hardy spaces on an interval and Poisson integrals associated with ultraspherical series, Journal of Functional Analysis, Vol.239, 2006, pp.446 - 496, 査読有 .

(15) Yuichi Kanjin, Transplantation operators and Cesaro operators for the Hankel transform, Studia Mathematica, Vol. 171, 2006, pp.29 - 45, 査読有 .

(16) Dashan Fan and Shuichi Sato, Singular and fractional integrals along variable surfaces, Hokkaido Mathematical Journal, Vol.35, 2006, pp.61 - 85, 査読有 .

(17) Enji Sato, A generalization of the Hankel transform and the Lorentz multipliers, Tokyo Journal of Mathematics, Vol.29, 2006, pp.147 - 166, 査読有 .

(18) Yasuo Komori (古谷康雄) and Takahiro Mizuhara, Factorization of functions in $H^1(\mathbb{R}^n)$ and generalized Morrey spaces, Mathematische Nachrichten, Vol.279, 2006, pp.619 - 624, 査読有 .

[学会発表](計20件)

(1) 宮地晶彦, Fourier 級数の概収束についての Carleson-Hunt の定理, 調和解析セミ

ナー, 2009年12月26,27,28日, 岡山大学教育学部 .

(2) 小森康雄, 多重特異積分入門, 調和解析セミナー2009, 2009年12月26日, 岡山大学教育学部 .

(3) 小林政晴・宮地晶彦・富田直人, 局所 Hardy 空間と modulation 空間の包含関係について, 日本数学会秋季総合分科会, 実関数論分科会, 2009年9月24日, 大阪大学 .

(4) 宮地晶彦・富田直人, Unimodular Fourier multiplier の modulation 空間評価, 日本数学会秋季総合分科会, 実関数論分科会, 2009年9月24日, 大阪大学 .

(5) Akihiko Miyachi, Change of variables for weighted Hardy spaces on a domain, International Symposium on Banach and Function Spaces 2009, 2009年9月14日, 九州工業大学 .

(6) Akihiko Miyachi, Change of variables for weighted Hardy spaces on a domain, 国際研究集会 Harmonic Analysis and Partial Differential Equations 2009年5月28日, 北京師範大学 .

(7) 宮地晶彦, 領域上の重み付きハーディ空間の変数変換について, 東海大学談話会, 2009年1月22日, 東海大学工学部 .

(8) 小森康雄(古谷康雄), Div-curl lemma とその周辺, 調和解析セミナー2008, 2008年12月26日, 山形大学理学部 .

(9) 佐藤圓治, Bilinear operator に関して, 調和解析セミナー2008, 2008年12月25日, 山形大学理学部 .

(10) 宮地晶彦, シャープ最大関数とその応用, 大阪大学微分方程式セミナー, 2008年11月21日, 大阪大学大学院理学研究科 .

(11) 松岡勝男・小森康雄, Some weak estimates for singular integral operators on Herz spaces, 実解析学シンポジウム2008, 2008年11月8日, 山口大学理学部 .

(12) Yasuo Komori (古谷康雄), Pseudo-differential operators on Hardy spaces, Harmonic Analysis and its Applications at Tokyo 2008, 2008年10月10日, 首都大学東京 .

(13) 小森康雄(古谷康雄), Time-Frequency 解析, Dyadic Harmonic Analysis 入門, 調和解析セミナー2007, 2007年12月24日, 草津セミナーハウス .

(14) Yuichi Kanjin, Paley's inequality of integral transform type, Harmonic Analysis and Orthogonal Systems, 2007年11月23日, Miraflores de La Sierra, Madrid, Spain .

(15) 佐藤秀一, L_p estimates for singular Radon transforms and extrapolation, Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo 2007, 2007年9月4日, 北海道

大学理学部 .

(16) 勘甚裕一, 移植作用素とチェザロ作用素, 第 46 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム, 2007 年 8 月 8 日, 九州大学西新プラザ .

(17) 立澤一哉, Wavelet characterization of weighted spaces, 調和解析と非線形偏微分方程式研究集会, 2007 年 7 月 10 日, 京都大学数理解析研究所 .

(18) 松岡勝男・小森康雄, On the weighted Herz spaces and the boundedness for some sublinear operators, 調和解析セミナー 2006, 2006 年 12 月 25 日, 大阪教育大学天王寺キャンパス .

(19) 白井悟・小森康雄(古谷康雄), Weighted Morrey spaces and maximal operator, 日本数学会秋季総合分科会, 実関数論分科会, 2006 年 9 月 21 日, 大阪市立大学 .

(20) Akihiko Miyachi, Weighted Hardy spaces on an interval and Jacobi series, Function Spaces VIII, 2006 年 7 月 7 日, Bedlewo, Poland .

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

宮地 晶彦 (MIYACHI AKIHIKO)

東京女子大学・現代教養学部・教授

研究者番号 : 60107696

(2) 研究分担者

勘甚 裕一 (KANJIN YUICHI) (2006 - 2007)

金沢大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号 : 50091674

小園 英雄 (KOZONO HIDEO) (2006 - 2007)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号 : 00195728

佐藤 秀一 (SATO SHUICHI) (2006 - 2007)

金沢大学・教育学部・准教授

研究者番号 : 20162430

佐藤 圓治 (SATO ENJI) (2006 - 2008)

山形大学・理学部・教授

研究者番号 : 80107177

古谷 康雄 (小森 康雄) (FURUYA YASUO, KOMORI YASUO) (2006 - 2009)

東海大学・沼津教養教育センター・教授

研究者番号 : 70234903

立澤 一哉 (TACHIZAWA KAZUYA) (2006 - 2007)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号 : 80227090

篠原 昌彦 (SHINOHARA MASAHIKO) (2006 - 2008)

東京女子大学・文理学部・教授

研究者番号 : 70086346

大阿久 俊則 (OAKU TOSHINORI) (2008)

東京女子大学・文理学部・教授

研究者番号 : 60152039

(3) 連携研究者

岡田 正己 (OKADA MASAMI)

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授

研究者番号 : 00152314

杉本 充 (SUGIMOTO MITSURU)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号 : 60196756

佐藤 秀一 (SATO SHUICHI) (2008 - 2009)

金沢大学・教育学部・准教授

研究者番号 : 20162430

立澤 一哉 (TACHIZAWA KAZUYA) (2008 - 2009)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号 : 80227090

富田 直人 (TOMITA NAOHITO)

大阪大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号 : 10437337

小林政晴 (KOBAYASHI MASA HARU)

東京理科大学・理学部・助教

研究者番号 : 30516480

澤野 嘉宏 (SAWANO YOSHIHIRO)

京都大学・理学部・助教

研究者番号 : 40532635

中井 英一 (NAKAI EIICHI)

大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号 : 60259900

勘甚 裕一 (KANJIN YUICHI) (2008 - 2009)

金沢大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号 : 50091674

佐藤 圓治 (SATO ENJI) (2009)

山形大学・理学部・教授

研究者番号 : 80107177