

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2006～2009

課題番号：18340044

研究課題名（和文） 力学系理論における関数解析的方法の研究

研究課題名（英文） Study of functional analytic methods in dynamical system theory

研究代表者

辻井 正人 (TSUJII MASATO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：20251598

研究成果の概要（和文）：力学系理論やエルゴード理論における関数解析的な手法の研究を行った。双曲的または部分双曲的な力学系において、系に適合した相空間上の関数空間を調和解析の方法で構成し、転移作用素の作用がその関数空間上で良いスペクトル的な性質を持つことを示した。応用として、特に拡大的な半流や負曲率多様体上の測地流について、Ruelle-Pollicott 共鳴や力学系のゼータ関数の解析的な性質について精密な結果を得た。

研究成果の概要（英文）：We studied functional analytic methods in dynamical systems theory and ergodic theory. For hyperbolic and partially hyperbolic dynamical systems, we constructed function spaces on the phase space adapted to the system so that the corresponding transfer operators have good spectral properties on them. As an application, we get precise results on Ruelle-Pollicott resonance and analytic properties of dynamical zeta functions especially for expanding semi-flows and geodesic flows on negatively curved manifolds.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	3,400,000	0	3,400,000
2007年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2008年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2009年度	3,100,000	930,000	4,030,000
年度			
総計	12,300,000	2,670,000	14,970,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：大域解析

キーワード：力学系, 関数解析, エルゴード理論, カオス, ゼータ関数

1. 研究開始当初の背景

力学系とは常微分方程式や写像の反復合成のように時間発展を記述する数学的モデルのことである。それを対象とする力学系理

論は、一方で純粋数学の様々な問題と関係し、他方で物理学や工学に応用を持つ重要な数学の分野である。よく知られているように非線形の力学系にはカオスと呼ばれる

複雑な軌道の構造が現れる。カオスにおける様々な法則性を研究することは力学系理論の主要な課題の一つである。カオスにおける力学系の各軌道の振る舞いは非常に複雑になるが、逆に、そこには統計的な法則性が表れる。力学系の軌道の統計的性質を扱う理論がエルゴード理論である。

エルゴード理論においては力学系を測度の空間や二乗可積分関数の空間、連続関数の空間への作用を通して理解することが一般的に行われている。しかし我々が考察する力学系の多くが滑らかな構造 (r 回連続微分可能構造) を持っていることを考えると r 回連続微分可能関数の空間やその双対空間 (r 階の超関数の空間) への作用を考えることは同様に自然であるし、より精密な結果を期待できる。これが本研究で超関数やフーリエ変換を用いた関数解析的な手法でその作用を研究した背景である。

2. 研究の目的

本研究の目的は超関数やフーリエ変換、擬微分作用素を用いた関数解析的な手法を用いて、力学系の転移作用素のスペクトルの性質を明らかにすることである。力学系としては、離散時間の双曲力学系 (双曲的微分同相の反復合成) と連続時間の双曲力学系 (双曲的な流れ) を考え、それぞれの場合に系の構造に適応した関数空間を構成し、その上の転移作用素の作用のスペクトル的な性質を分析する。さらに、その結果から力学系の性質についての情報を取り出す。

3. 研究の方法

数学の理論的な研究である事から、方法としては「関係する分野の研究の理解」や「関係する分野の研究者との交流」と集中した思考以外の方法はない。私自身は力学系やエルゴード理論を専門として研究して来た関係で、関数解析については基本的な部分から文献を理解し、消化する必要があった。そのため、いくつか関数解析や関係する諸分野の書籍を購入したり、図書館で基本的文献をあたることから研究を始めた。また、できるだけ広い範囲の研究者と交流するため、研究集会にも積極的に参加し、これまでの研究成果を発表するとともに、関係する分野の研究者との交流を図った。

より具体的な面では、次のような方法で研究を行った。関数空間の構成方法として、適切な擬微分作用素 P をとり、関数のその作用

素による像の 2 乗ノルムについての完備化として関数空間を構成するというのが基本的なアイデアである。もちろん、このときの擬微分作用素 P の取り方が問題であり、力学系理論からの要請と関数空間としての適切性のバランスをとりながら選ぶ必要があった。離散時間の双曲力学系の場合には余接束上の関数で、安定方向にはある多項式のオーダーで増大し、不安定方向には多項式のオーダーで減衰するようなシンボルについての擬微分作用素を使うことで、良い関数空間が得られる。一方、連続時間の力学系の場合には、流れの方向が力学系として中立的であることから別の種類の困難が発生する。簡単に言えば、この点が結果的には本研究の最も重要な点になった。

ここで述べた連続時間の場合の困難については、研究を始めてから約 1 年半は暗中模索の状態が続いたが 2007 年の秋に、一般的な双曲の流れを考える代わりに、いわゆる接触アノソフ流というクラスの流れを考え始めた事をきっかけに、発展し始めた。接触アノソフ流についても、そこで考察する必要がある擬微分作用素のシンボルがいわゆる古典的な擬微分作用素の理論で扱われるものではなく、その境界に現れる現代的なものになる事から、研究は難航した。しかし、苦心惨憺の末、2008 年の夏までに理論を完成しプレプリントとして公開した。

このプレプリントは内容的に複雑であったこともあり、出版は遅れ、現在 (2010 年 5 月) *Nonlinearity* という雑誌に受理され、印刷中である。しかし、このプレプリントは私が想定していた力学系理論やエルゴード理論よりもむしろ、いわゆる量子カオスの半古典論と呼ばれる分野の人々 (具体的には F. Faure や S. Nonnenmacher) に反響を引き起こした。このことがきっかけとなり、私自身も私の接触アノソフ流や測地流の研究と半古典解析と呼ばれる分野の研究の関係に興味を持つようになった。そして、2009 年の秋に 2 ヶ月に私、イタリア、フランス、ドイツを訪問し、Faure 氏や Nonnenmacher 氏と研究上の情報交換を行った。特に Faure 氏の近年の研究は半古典解析から力学系のカオスにアプローチするというもので、私の研究とちょうど逆の方向の者であり、今後共同研究する事になった。また、Faure 氏との議論から、半古典解析における議論 (特に FBI 変換) は測地流の研究においても非常に有用である事がわかり、現在先に述べたプレプリン

トの内容をそれらを使ってより簡明な（もしくは系統的な）議論で示す事を目標に研究をすすめている。残念ながら、これらの研究はまだ出版の段階になっていないが、本研究の成果と言えらると思う。

4. 研究成果

本研究の主な研究成果は（上でも述べたように）論文“Quasi-compactness of transfer operators for contact Anosov flows”（印刷中, Nonlinearity）の主定理であるので、その点を中心に述べる。接触アノソフ流というクラスの流れについて考える。その主な例は負曲率多様体上の測地流である。このような流れはいわゆるカオス的な流れの最も典型的なものであり、1930年代から研究されてきたものである。接触アノソフ流に対して、最も単純な転移作用素として引き戻し作用素（Koopman 作用素）を考える。ある適切な（超関数のなす）ヒルベルト空間をとると、この作用素の本質的スペクトル半径が真に1よりも小さくなり、具体的には不安定方向の（体積）拡大率の $-1/2$ 乗で上から評価されるという結果が上記論文の主定理である。この結果からそれまでに得られていた中心極限定理（1996 Chernov）や相関の指数的減衰（2002 Liverani）が直接の系として従う。さらに、この結果で与えた本質的スペクトル半径についての上からの評価は非常に良い評価であり、定曲率曲面の場合には、有名な Selberg のゼータ関数についての結果と比較する事で、最良である事がわかる。

また、その前に得られていた結果 “Decay of correlations in suspension semi-flows of angle-multiplying maps”. Ergodic Theory Dynam. Systems 28 (2008), no. 1, 291-317 は拡大的な半流について、ジェネリックな仮定の下で上で述べたのと同じ結果を与えたものであり、いわば一つの習作である。ただ、上で述べた接触アノソフ流についての結果がジェネリックな仮定をみたすアノソフ流について成り立つかどうかは未解決である。

Vivian Baladi 氏 (Ecole Normal Superior, フランス) との共同研究は離散時間の双曲的力学系についてのものであり、離散時間の場合に、相関の減衰や力学系のゼータ関数についての精密な結果を示している。これらは離散時間の場合のほぼ決定的な結果であり、現在 Baladi 氏が本として刊行するために執筆を進めている。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計16件）

①Tsujii, Masato

“Quasi-compactness of transfer operators for contact Anosov flows”

（印刷中, Nonlinearity）査読あり

②Baladi, Viviane; Tsujii, Masato

“Spectra of differentiable hyperbolic maps.” Traces in number theory, geometry and quantum fields, 1--21, Aspects Math., E38, Friedr. Vieweg, Wiesbaden, 2008. 査読あり

③Baladi, Viviane; Tsujii, Masato

“Dynamical determinants and spectrum for hyperbolic diffeomorphisms” .

Geometric and probabilistic structures in dynamics, 29--68, Contemp. Math., 469, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. 査読あり

④Tsujii, Masato

“Decay of correlations in suspension semi-flows of angle-multiplying maps” . Ergodic Theory Dynam. Systems 28 (2008), no. 1, 291-317 査読あり

⑤Baladi, Viviane; Tsujii, Masato

“Anisotropic Hölder and Sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms” .

Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 57 (2007), no. 1, 127--154. 査読あり

⑥Liverani, Carlangelo; Tsujii, Masato

“Zeta functions and dynamical systems” . Nonlinearity 19 (2006), no. 10, 2467--2473. 査読あり

⑦Avila, Artur; Gouëzel, Sébastien;

Tsujii, Masato “Smoothness of solenoidal attractors” . Discrete Contin. Dyn. Syst. 15 (2006), no. 1, 21--35. 査読あり

⑧Ishii, Yutaka

Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of C^2 . I: A non-planar map.

Adv. Math. 218, no. 2, pp. 417-464 (2008). 査読あり

⑨Ishii, Yutaka

Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of C^2 . II: Hubbard trees.

Adv. Math. 220, no. 4, pp. 985-1022 (2009). 査読あり

⑩Ishii, Yutaka

Homotopy shadowing. (with J. Smillie)

Amer. J. Math. 132, In press (2010). 査読あり

⑪Sands, Duncan; Ishii, Yutaka

“Lap number entropy formula for piecewise affine and projective maps

in several dimensions. (with D. Sands)
Nonlinearity 20, no. 12, 2755--2772 (2007).
査読あり

⑫ Ishii, Yutaka

"Julia sets and chaotic tunneling I".
(with A. Shudo and K. S. Ikeda)
J. Phys. A: Math. Theor. 42, article number
265101 (26pp), (2009). 査読あり

⑬ Ishii, Yutaka

"Julia sets and chaotic tunneling II".
(with A. Shudo and K. S. Ikeda)
J. Phys. A: Math. Theor. 42, article number
265102 (34pp), (2009). 査読あり

⑭ Nii, Shunsaku

"Bifurcations of stationary solutions
with triple junctions in phase separation
problems --A new view of bifurcation
analysis--", in Physica D 238 (2009), pp.
1050-1055 査読あり

⑮ Deng, Jian; Nii, Shunsaku

"An infinite-dimensional Evans function
theory for elliptic boundary value
problems"
J. Differential Equations 244 (2008), no.
4, 753--765. 査読あり

⑯ Deng, Jian; Nii, Shunsaku

"Infinite-dimensional Evans function
theory for elliptic eigenvalue problems in
a channel"
J. Differential Equations 225 (2006), no.
1, 57--89. 査読あり

[学会発表] (計6件)

① 辻井 正人

"Functional analytic methods in smooth
ergodic theory"
(2010年1月26日, 2月2日, 「Dynamics and
PDE's」 Mittag-Leffler 研究所, ストック
ホルム, スウェーデン)

② 辻井 正人

"On the semi-classical zeta functions for
negatively curved manifolds" (2009年11
月10日, MFO, Oberwolfach, ドイツ)

③ 辻井 正人

"半古典ゼータ関数の零点の分布について
(可変負曲率多様体の測地流の場合)"
2009年1月11日, 力学系冬の研究集会. 日
本大学軽井沢研修所 (軽井沢, 長野)

④ 辻井 正人

"Quasi-compactness of transfer operators
for contact Anosov flows" (2008年9月10
日, Dynamics Days Asia Pacific 5, 新奈良
公会堂, 奈良)

⑤ 辻井 正人

"Quasi-compactness of transfer operators
for contact Anosov",
(2008年6月24日, WORKSHOP on HYPERBOLIC

DYNAMICAL SYSTEMS WITH SINGULARITIES,
Irwin Schrodinger Institute, Vienna, オ
ーストリア)

⑥ 辻井 正人

"Spectrum of transfer operators for
hyperbolic flows"
(2008年2月13日, Workshop GREFI-MEFI
2008 "From dynamical systems to
statistical mechanics", at CIRM,
Marseille, フランス)

[その他]

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tsujii/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

辻井 正人 (TSUJII MASATO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 20251598

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

石井 豊 (ISHII YUTAKA)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号: 20304727

新居 俊作 (NII SHUNSAKU)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号: 50282421