

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18340049

研究課題名 (和文) スペクトル散乱理論における漸近解析

研究課題名 (英文) Asymptotic Analysis in Spectral and Scattering Theory

研究代表者

田村 英男 (TAMURA HIDEO)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：30022734

研究成果の概要：

量子力学が提供する数学の諸問題は広く深く、そして豊かである。その研究対象であるミクロな世界では古典力学的な観点から説明できない注目すべき現象がしばしば生じる。このような自然現象は量子効果とよばれ、ひとつひとつが数学解析の格好の題材を提供している。本研究は、スペクトル理論において培われた漸近的手法を駆使し、量子力学に現れる量子効果のいくつかについて、その数理現象を追究する目的で行われた研究である。とくに、複数のソレノイド磁場による散乱におけるアハラノフ・ボーム量子効果について準古典漸近解析を展開した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	2,200,000	660,000	2,860,000
2007 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2008 年度	2,300,000	690,000	2,990,000
年度			
年度			
総計	6,500,000	1,950,000	8,450,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学 (4105)

キーワード：(1) 関数方程式の大域理論 (2) スペクトル散乱理論 (3) シュレディンガー作用素
(4) 準古典漸近解析 (5) アハラノフ・ボーム効果

1. 研究開始当初の背景

スペクトル理論の研究においては、偏微分方程式論、作用素論、数理物理などからの問題意識が交差し、その方法も多岐にわたってい

る。そして、得られた研究成果は、ラプラス作用素のスペクトル理論を通して、確率論、微分幾何学、整数論などの諸分野と多くの接点を有し、数学のひとつの大きな研究分野を

形成している。スペクトル理論は、その周辺分野の研究者を含めると、多くの研究者人口を抱え、欧米の諸外国で活発に研究が行われている。本研究の動機は、スペクトル理論において培われた漸近的手法を用いて、散乱過程に現れる種々の物理量（散乱振幅・散乱位相・散乱全断面積）の漸近性を解析するにあった。例を挙げれば、プランク定数に相当する微小媒介変数の零極限をとることによって、古典力学との関係をみる準古典近似問題や零エネルギー近傍における散乱振幅の特異な振る舞いの漸近解析などが研究の背景にあった。さらには、指数積公式のノルム収束の最近の結果を踏まえ、シュレディンガー半群の基本解および熱核の近似問題も大次元空間での積分の漸近解析の観点から興味をもった。

2. 研究目的

研究成果の概要で述べたように、本研究は、量子効果の背後に潜む数理現象の究明を目指し、スペクトル漸近性に関わる3つの課題を追究した。

(1) 複数個のソレノイド磁場による散乱における準古典漸近解析

(2) 指数積公式によるシュレディンガー半群の積分核および熱核近似

(3) 長距離型ポテンシャルによる散乱に対する低エネルギー領域での漸近解析

いずれの課題も量子効果に深い関りを有する。課題(1)はアハラノフ・ボーム効果に、(2)は量子現象の観測における量子ゼノン効果に、(3)はグローリー効果に関係する。

3. 研究方法

理論研究のため、研究方法は研究集会に参加し、同じ分野の研究者と課題に関する討論と情報収集による標準的なものである。その

ため、研究経費の大部を旅費に費やした。情報交換は、主として京都大学数理解析研究所で定期的で開催されている「作用素論セミナー」（主催者 竹井・岩塚・峯）の場で行った。課題に関する有益な情報を得るために、海外の研究者との交流も行った。代表者は、2006年、2007年にスペクトル理論の準古典解析を活発に展開しているナント大学（フランス）を訪ね、課題(1)について討論を行った。また、ナント大学から2名の研究者を招聘し、研究集会を姫路で開催した（主催者 藤家）。さらに、研究分担者や連携研究者のスペクトル理論に関する国際研究集会への出張旅費もこの経費によって支えられた。

4. 研究成果

研究目的に挙げた3課題について得られた成果について説明していく。

(1) 本研究で最も力を注いだ課題であり、目標に近い成果が得られたと思える。量子力学にしたがう粒子が磁場の中を運動するとき、磁場ポテンシャル自身が直接関与する。量子力学の根幹に深く関るこの現象は、アハラノフ・ボーム効果（AB効果）とよばれている。この効果はアハラノフとボームによって理論的に提唱され（Phys. Rev., (1959)）、その実在は、外村 彰によって実験的に検証された。この課題では、2つのソレノイド磁場（デルタ型磁場）による2次元磁場散乱を考える。複数個のソレノイド磁場による散乱においては、磁場の中心間で振動する古典軌道が存在し、いわゆる捕捉現象が発生する。このため、AB効果による粒子の「波動性」と捕捉効果による粒子の「粒子性」が混在する系となる。そのような量子系に対して、散乱振幅、散乱全断面積、散乱位相などの散乱理論における基本的な物理量の漸近公式を導き、AB効果の準古典漸近解析を展開して

きた。そして、得られた漸近公式が、磁場の中心の配置と磁束に深く関係し、単一のソレノイド磁場による散乱の場合とは著しく異なる形をとることを明らかにした（論文 [2, ~3, ~4, ~5]）。今後に残された興味ある継続課題は、捕捉現象によって実軸近傍に生じるレゾナンスの問題である。

(2) この課題は、一瀬 孝氏（金沢大学）との数年来にわたる指数積のノルム収束に関する共同研究から自然に広がっていった研究課題である。シュレディンガー作用素によって生成される半群がトロッター・加藤積公式とよばれる指数積によって強収束近似できることはよく知られている。最近、特異性を有するかなり広いクラスのポテンシャルに対して、作用素ノルムでも収束可能であることを明らかにされた。この課題では、半群の積核（基本解）のレベルにおいても収束することを示した。さらに、指数積公式がディリクレ ラプラシアンが生成する半群の熱核近似にも適用できることを示した。これらの結果を論文 [1] で公表した。今後の課題として、熱核近似の指数積について、大次元空間での積分に対する漸近解析という視点から見直しを行いたい。この考えが虚数時間に換えることによって定義される指数積（ゼノン（Zeno）積）の強収束問題（ゼノン量子効果）においても有効な手法を提供するものと期待できる。ゼノン積の強収束問題は、量子系の観測に関わる問題である。

(3) この課題については、研究期間内において目新しい成果を残念ながらあげることができなかった。しかし、最近、次の2つのプレプリントが公表され、注目すべき新たな進展がもたらされた（J. Dereziński, E. Skibsted, R. L. Frank）これらの仕事を糸口にして、グローリー（Glory）効果にみられるような引力型ポテンシャルによる散乱

振幅（とくに後方散乱振幅）の低エネルギー領域での特異性の発現の解明を継続研究課題として追究したい。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計5件）

① H. Tamura,
Semiclassical analysis for spectral shift functions in magnetic scattering by two solenoidal fields,
Rev. Math. Phys., 20 (2008), 1249 - 1282,
（査読有）

② H. Tamura,
Time delay in scattering by potentials and by magnetic fields with two supports at large separation,
J. Func. Anal., 254 (2008), 1735 - 1775,
（査読有）

③ H. Tamura,
Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields: total cross sections,
Ann. Henri Poincare, 8 (2007), 1071-1114,
（査読有）

④ H.T. Ito and H. Tamura,
Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields,
J. London Math. Soc., 74 (2006), 695-716
（査読有）

⑤ T. Ichinose and H. Tamura,
Exponential product approximation to the integral kernel of the Schrödinger semigroup and to the heat kernel of the Dirichlet Laplacian,
J. Reine Angew. Math., 592 (2006), 157-188,
（査読有）

〔学会発表〕（計13件）

① 田村 英男,
磁場散乱におけるアハラノフ・ボーム効果に対する準古典漸近解析,
2009年3月 日本数学会年会 函数解析学分会 特別講演 東京大学

② 田村 英男,
Semiclassical analysis for spectral shift functions in magnetic scattering by two solenoidal fields,
2009年3月 第19回「微分方程式と数理物理」研究集会 静岡県熱海市

③ 田村 英男,
ポテンシャル散乱と磁場散乱におけるある
レゾナンス問題について,
2008年11月 第15回「超局所解析と古典
解析」研究集会 福井県坂井市

④ 田村 英男,
Resonances in scattering by potential and
by magnetic field with two supports at
large separation,
2008年10月 作用素論セミナー 京都大学
数理解析研究所

⑤ 田村 英男,
Semiclassical analysis for scattering by
two magnetic fields ; spectral shift
functions,
2008年4月 作用素論セミナー 京都大学
数理解析研究所

⑥ 田村 英男,
Semiclassical analysis for magnetic
scattering by two solenoidal fields,
2007年12月 「微分方程式の総合的研究」
東京大学数理科学研究科

⑦ 田村 英男,
Spectral shift function in magnetic
scattering by two solenoidal fields,
2007年11月 第18回「微分方程式と数
理物理」研究集会 山口県萩市

⑧ H. Tamura,
Time delay in scattering by potentials and
by magnetic fields with two supports at
large separation,
2007年9月 Analysis Seminar, Nantes
University, France

⑨ 田村 英男,
Time delay in scattering by potentials and
by magnetic fields with two supports at
large separation,
2007年5月 作用素論セミナー 兵庫県
立大学神戸キャンパス

⑩ 田村 英男,
ソレノイド磁場による散乱におけるレゾナ
ンスについて,
2006年11月 第13回「超局所解析と古
典解析」研究集会 岐阜県郡上市

⑪ 田村 英男,
Aharonov-Bohm effect in scattering by two
solenoidal fields,
2006年10月 Recent Topics on
Differential Equations, 群馬大学東京オ
フフィス

⑫ 田村 英男,
Semiclassical analysis for magnetic
scattering by two solenoidal fields ;

total cross sections,
2006年6月 作用素論セミナー 京都大
学数理解析研究所

⑬ H. Tamura,
Semiclassical analysis for magnetic
scattering by two solenoidal fields,
2006年5月 Spectral Analysis in
Mathematical Physics, Nantes University,
France.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田村 英男 (TAMURA HIDEO)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：30022734

(2) 研究分担者

廣川 真男 (HIROKAWA MASAO)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：70282788

(3) 連携研究者

勝田 篤 (KATSUDA ATSUSHI)
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：60183779

一瀬 孝 (ICHINOSE TAKASHI)
金沢大学・大学院自然科学研究科
名誉教授
研究者番号：20024044

岩塚 明 (IWATSUKA AKIRA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号：40184890

伊藤 宏 (ITO HIROSHI, T)
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：90243005

中野 史彦 (NAKNO FUMIHIKO)
高知大学・理学部・准教授
研究者番号：10291246

峯 拓矢 (MINE TAKUYA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科
准教授
研究者番号：90378597

