

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2006～2008

課題番号：18360048

研究課題名（和文） 離散凸パラダイムの深化と拡大

研究課題名（英文） Deepening and Expansion of Discrete Convexity Paradigm

研究代表者

室田 一雄 (MUROTA KAZUO)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号：50134466

研究成果の概要：経済学，システム工学，最適化理論，アルゴリズム理論などの広汎な分野における基礎的諸問題に関わる離散構造を，離散凸性という横断的視点から整理し，「離散凸」という新しいパラダイムを確立し，それを広範囲の応用分野に浸透させる研究を行った。「離散凸パラダイム」の横糸を成す，構造定理やアルゴリズムを代表とする離散関数に関する数理の研究と，縦糸を成す，諸応用分野における具体的な諸問題に対する研究を行った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	3,900,000	1,170,000	5,070,000
2007年度	3,700,000	1,110,000	4,810,000
2008年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
年度			
年度			
総計	11,100,000	3,330,000	14,430,000

研究分野：数理工学

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎・工学基礎

キーワード：離散最適化，凸関数，双対性，劣モジュラ関数，マトロイド

1. 研究開始当初の背景

連続値の変数に関する非線形最適化の分野では，凸関数の理論（凸解析）が中心的な役割を果たしている．一方，離散最適化の分野では，マトロイドの構造（ネットワークフロー問題や最小木問題に共通する構造）が良い性質と認知されていたものの，凸解析のような統一的な視点は存在しなかった．

そこで，研究代表者は凸解析理論とマトロイド理論を融合し，離散関数に対する凸解析

理論（離散関数を扱う統一的な枠組み）として「離散凸解析」の理論体系を提唱した．互いに共役な2種類の離散凸性であるM凸関数とL凸関数の概念，構造定理(共役性，双対性)などの理論的コアは大方整備され，理論の概要は専門書として刊行された．それ以降も，概念の拡張，アルゴリズムの改良，応用分野の拡大が行われている．

これまでに明らかになった理論的コアをより深める理論研究と，様々な分野に拡げる

応用研究とを研究推進のための両輪として展開していくことで、離散凸解析理論を新たな局面に発展させていくことが、本課題の動機である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、経済学、システム工学、オペレーションズ・リサーチ、最適化理論、アルゴリズム理論などの広汎な分野における基礎的諸問題に関わる離散構造を、離散凸性という横断的視点から整理し、「離散凸」という新しいパラダイムを確立し、それを広範囲の応用分野に浸透させることにある。

既に整備された理論的コアを基礎として、概念の拡張、アルゴリズムの改良、さらなる応用分野への拡大に取り組み、その成果を広く普及させることを目的とした。

3. 研究の方法

目的の実現のため、「離散凸パラダイム」の横糸を成す、構造定理やアルゴリズムを代表とする離散関数に関する数理の研究と、縦糸を成す、諸応用分野における具体的な諸問題に対する研究を行った。離散凸解析理論の研究ですでに整備されたM凸関数とL凸関数の概念、共役性、双対性などの理論的コアを、より深め、より一般的な概念に拡張を試みる理論研究と、様々な分野に広げる応用研究の両面から、研究計画を実行した。

理論研究と応用研究の推進のほかに、新しい研究テーマの開拓のためにも、成果を広く浸透させるための発表も必要である。現在までに、マトロイド、基多面体、デルタマトロイド、ジャンプシステムなどの上の離散関数に対してM凸関数の概念が定義されている。この一般化の系列は、離散変数の関数に対するM凸関数概念を拡張するものであるが、一方、M凸関数の概念は、連続変数の関数に対しても定義され、これによって「離散構造を兼ね備えた凸関数」が把握される。L凸関数の概念についても、劣モジュラ集合関数を始点として、そのLovasz拡張や、あるいは、待ち行列理論におけるマルチモジュラ関数などの種々の変種あるいは亜種がある。離散凸パラダイムを広範囲の応用分野へ浸透させるためにも、このような考え方を「離散と連続」という一般的な視点から整理して和文の著書の形に纏めた。また、以前の専門書の発行以降の進展を、応用分野の拡大に重点をおいた形で英文のサーベイに纏めた。

また、研究成果を多くの人に利用してもらえるよう、離散凸関数最小化アルゴリズムを実装したソフトウェアをWeb上で公開した。

4. 研究成果

(1) 構造定理やアルゴリズムを代表とする離散関数に関する数理の研究と、諸応用分野における具体的な諸問題に対する研究の両観点から、以下のような成果を得た。

①マトロイドの重要な性質の一般化として、2部グラフのマッチングの抽象化概念であるリンクシステムを用いた変換によって、M凸関数がM凸関数に移されることを示した。

②ジャンプシステムと呼ばれる離散システム上の関数に対して、M凸関数の概念を定義し、合成積やネットワーク誘導などの基本演算ができることを示した。さらに、ネットワーク誘導の一般化として、リンクシステムによる変換が定義できることを示した。ジャンプシステム上のM凸関数に対して、局所最適性が大域最適性を保証するという定理と、大域最適解を求めるアルゴリズムがある。この事実を踏まえて、今後の展望として、効率的に解ける問題は離散凸性を有するという経験的事実を追究していくことが挙げられる。

③連続変数と離散変数が混在した関数に対してM凸関数の概念を定義し、局所最適性と大域最適性の関係など、その基本的な性質を明らかにした。

④数理経済学におけるマッチングモデルにおいて、効用関数が離散凹関数である場合に均衡が存在することを示した。これにより、近年海外で提案されたいくつかのモデルが、統一的な枠組に吸収されたことになる。

⑤制御理論において基本となる行列束の構造を組合せ論的に特徴づけた。

⑥行集合と列集合を共有するリンクシステムの組を、行列ペンシルの組合せ論的抽象化と捉えて、マトロイドペンシルと定義し、行列ペンシルのKronecker標準形に類似した組合せ的な構造を明らかにした。応用として、リンクシステムの冪乗に関する室田(1990)の定理に簡潔な別証明を与えた。

⑦離散L凸関数の実用的な高速最小化のために、連続関数から離散関数が定義される実用上一般的なケースに対して、連続緩和を利用した最小化法を導入した。理論的な進展として、連続緩和と離散最小解の近接性を証明したことが挙げられる。応用展開への貢献として、この最小化法を実装したソフトウェア、ODICON (Optimization algorithms for Discrete CONVex functions)をWeb上で公開したことが挙げられる。

⑧数値情報が必ずしも正確でない最適化問題に関連して、符号情報のみから有用な情報を引き出す手法を開発した。

⑨多重クラス待ち行列システムの解析で見られる劣モジュラ関数に対して、効率的な最小

化アルゴリズムを構築した。一般の劣モジュラ関数の最小化に関しては、既存のアルゴリズムより簡潔な組合せ的多項式時間アルゴリズムを設計した。さらに、関連する研究動向を整理した総説を執筆した。

(2) 得られた成果から導かれる今後の展望として、離散凸パラダイムをより「拡大」させるため、成果を具現化したソフトウェアの整備・公開をさらに推進していくことが挙げられる。一部のソフトウェアの開発と公開は既に行っているが、その経験を基にして、これまでの研究で明らかになった離散凸解析の理論を説明するデモンストレーション・ソフトウェアと、個別の応用分野をターゲットとしたアプリケーション・ソフトウェアを開発し、広範な応用分野の研究者・実務家が離散凸解析の手法を享受できる環境を整備していく。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 16 件)

- ① K. Murota and A. Shioura, Note on the continuity of M-convex and L-convex functions in continuous variables, Journal of Operations Research Society of Japan, 査読有, Vol. 51, No. 4 (2008), 265–273.
- ② Y. Kobayashi and K. Murota, Induction of M-convex functions by linking systems, Discrete Applied Mathematics, 査読有, Vol. 155 (2007), 1471–1480.
- ③ S. Iwata, Combinatorial analysis on singular matrix pencils, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 査読有, Vol. 29 (2007), 245–259.
- ④ S. Fujishige and A. Tamura, A two-sided discrete-concave market with possibly bounded side payments: An approach by discrete convex analysis, Mathematics of Operations Research, 査読有, Vol. 32 (2007), 136–155.

⑤ 森口聡子, 原辰次, 室田一雄, 連続/離散ハイブリッド M-凸関数に関する一考察, システム制御情報学会論文誌, 査読有, Vol. 20 (2007), 84–86.

⑥ K. Murota and K. Tanaka, A steepest descent algorithm for M-convex functions on jump systems, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, Vol. E89-A, No. 5 (2006), 1160–1165.

[学会発表] (計 14 件)

- ① K. Murota, Discrete convex analysis---basics and topics, Oberwolfach Workshop on Combinatorial Optimization, 2008 年 11 月 11 日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.
- ② K. Murota, Recent developments in discrete convex analysis, Bonn Workshop on Combinatorial Optimization, 2008 年 11 月 6 日, University of Bonn.
- ③ S. Moriguchi and N. Tsuchimura, Minimization of a discrete quasi L-convex function based on continuous relaxation, The 4th Sino-Japanese Optimization Meeting, 2008 年 8 月 27–31 日, National Cheng-Kung University.
- ④ S. Moriguchi and N. Tsuchimura, Discrete convex functions minimization based on continuous relaxation, Ninth International Conference Approximation and Optimization in the Caribbean - APPOPT' 2008, 2008 年 3 月 4 日, San Andres Island.

[図書] (計 4 件)

- ① K. Murota, Recent developments in

discrete convex analysis, in: W. Cook, L. Lovasz and J. Vygen, eds., Research Trends in Combinatorial Optimization, Springer-Verlag (2009), Chapter 11, 219-260 ページ.

② 室田一雄, 離散凸解析の考えかた---最適化における離散と連続の数理, 共立出版(2007), 252 ページ.

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

開発したソフトウェア

ODICON

<http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~tutimura/odicon/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

室田 一雄 (MURATA KAZUO)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号: 50134466

(2) 研究分担者

(2006 年度, 2007 年度)

田村 明久 (TAMURA AKIHISA)

慶応義塾大学・理工学部・教授

研究者番号: 50217189

岩田 覚 (IWATA SATORU)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号: 00263161

土村 展之 (TSUCHIMURA NOBUYUKI)

関西学院大学・理工学部・その他 (教育技術職員)

研究者番号: 20345119

森口 聡子 (MORIGUCHI SATOKO)

産業技術大学院大学・産業技術研究科・助教

研究者番号: 60407351

(3) 連携研究者

(2008 年度)

田村 明久 (TAMURA AKIHISA)

慶応義塾大学・理工学部・教授

研究者番号: 50217189

岩田 覚 (IWATA SATORU)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号: 00263161

塩浦 昭義 (SHIOURA AKIYOSHI)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号: 10296882

土村 展之 (TSUCHIMURA NOBUYUKI)

関西学院大学・理工学部・その他 (教育技術職員)

研究者番号: 20345119

森口 聡子 (MORIGUCHI SATOKO)

産業技術大学院大学・産業技術研究科・助教

研究者番号: 60407351