

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2009

課題番号：18500007

研究課題名（和文） 古典／量子情報系における十分性と指数型分布族の新たな展開

研究課題名（英文） New development of sufficiency and exponential families in classical and quantum information systems

研究代表者

長岡 浩司（NAGAOKA HIROSHI）

電気通信大学・大学院情報システム学研究科・教授

研究者番号：80192235

研究成果の概要（和文）：

確率分布を点とするような空間の幾何学的構造（情報幾何構造）と、確率分布同士を観測データにもとづいてどれくらい識別できるかという統計的推測問題とは互いに密接に関係する。十分性や指数型分布族という概念は、このような関係を考察する上で基本的な重要性を持つ。本研究では、このような問題意識を量子状態の識別問題や量子ボルツマンマシンの情報幾何構造などの新しい対象に適用し、理論的に意義のあるいくつかの結果を得た。

研究成果の概要（英文）： There is a close relationship between the (information-)geometrical structure of the space of probability distributions and the statistical inference problem on discriminating probability distributions from observed data. In considering this relationship, the notions of sufficiency and the exponential family are of fundamental importance. We have applied this viewpoint to new subjects including discrimination of quantum states and quantum Boltzmann machines, and have obtained several theoretically significant results.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,600,000	780,000	4,380,000

研究分野：数理工学

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：情報理論、量子情報理論、情報幾何学、指数型分布族、十分統計量

1. 研究開始当初の背景

(1) 十分性とは、確率分布族が統計量や通信路による変換を受けてもそれを統計的に元に戻せるという可逆性を表す概念

である。これは、種々の統計的推測問題を通して、確率分布族が指数型分布族と呼ばれる特別な形で表されるという条件と密接に関係する。この事実は数理統

計学における基本事項としてよく知られている。

- (2) 十分性、指数型分布族、統計的推測などの数理統計学における諸概念は、広く情報理論、情報幾何学、大偏差理論、統計力学などの諸分野にとっても重要な意義を持つと考えられるが、そのような統一的視点の有効性は十分に認識されているとは言えない。また、その視点を追求するための理論的基礎も十分に整備されていない。

## 2. 研究の目的

- (1) 統計量の十分性と指数型分布族という概念をより広い視点から、あるいはより基礎的な視点から捉え直すことを試みる。具体的には、ユニバーサル・データ圧縮と十分統計量の関係、可逆なマルコフ写像や可逆な量子状態操作が規定する情報幾何学的構造、確率過程の成す空間の情報幾何構造、量子情報幾何学的観点に基づいた指数型分布族の量子版、大偏差理論、統計力学などの諸問題についての研究を通して、十分性と指数型分布族に関する新たな統一的知見を得ることを目指す。
- (2) 特に量子情報系については、上述の問題を考察するための基礎がまだ不十分であるため、統計的推測問題をはじめとするさまざまな個別的関連問題の研究を行うことによって、十分性と指数型分布族に関する理論的知見を蓄積していく。

## 3. 研究の方法

- (1) 上述の諸問題に対し、統計学、情報理論、データ圧縮理論、量子情報理論、微分幾何学などの観点から数学的・理論的考察を行う。
- (2) 特に、指数型分布族をある種の平坦な部分空間 ( $e$ -接続に関する自己平行部分多様体) とみなす情報幾何学の考え方をさまざまな問題に適用していく。その際、幾何学的に自然に導入される相対エントロピー概念との関連に注目していく。
- (3) 量子状態に関する統計的推測などの新しい問題については、その分野の最新の成果にもとづいた個別的な考察を行う。
- (4) 理論的研究を補完する方法論として数値計算も適宜援用する。特に量子情報理論においては数値計算の手法そのものの整備が遅れているため、アルゴリズムの開発やその実現についての研究を進める。

## 4. 研究成果

- (1) 二つの i. i. d. (独立定常) 量子状態の

仮説検定 (状態識別) の誤り確率に関する Hoeffding 型定理について研究し、この定理を構成する二つの不等式のうち converse part と呼ばれる部分を、先行する Nussbaum and Szkola の結果にもとづいて証明した (quant-ph/0611289)。もう一つの direct part と呼ばれる部分は Audenaert et al の結果にもとづいて Hayashi (林正人) によって示されており、これと併せて量子 Hoeffding 定理の証明が完結した。

- (2) 二つの確率分布に関する古典 Hoeffding 定理には、それらの分布を結ぶ 1 次元指数型分布族と相対エントロピーをめぐる情報幾何学的状況が深く関わっている。この関係は、Hoeffding 定理が確率論における大偏差型問題の一種とみなせるという事実からの帰結でもある。一方、前項で述べたように Hoeffding 定理の量子系への拡張が成された結果、その本質を何らかの大偏差理論的枠組みにもとづいて理解したいという機運が高まってきた。このような視点のもとで量子 Hoeffding 定理に関する情報幾何学的問題について考察を行った。明確な結果は得られなかったが、今後の方向性について多くの知見が得られた。
- (3) 量子仮説検定問題の数値シミュレーションに関する研究を行った。古典的な場合にはモンテカルロ法などを用いることによって効率的な計算が可能であるが、量子仮説検定問題では系の規模に関して指数オーダーのサイズを持つ行列の固有値問題を解かざるを得ず、そのシミュレーションは困難だと考えられてきた。これに対し、表現論における既約分解の考えを用いたアルゴリズムを開発することによって、漸近特性が観察される程度にまで規模の大きなシミュレーションが実行可能であることを示した (堂嶋・片桐・長岡)。この研究は現在、坂下達也、片桐孝洋両氏との共同研究に引き継がれている。
- (4) 確率的ニューラルネットワークモデルの一種であるボルツマンマシンは、その平衡確率分布が指数型分布族を成すという事実由来する多くの有用な性質を持つ。我々はボルツマンマシンの平衡分布に類似した表現を持つ量子状態の族 (量子スピンの一種) を考え、それをボルツマンマシンの量子力学版とみなす立場からその性質を調べた。このような量子状態の全体は一種の「量子指数型分布族」を成すことに注目し、その情報幾何学的構造を明らかにした。また、この構造のもとで量子ボルツマンマシンのナイーブ平均場近似およびその漸近的改善法である Pelfka 展開について考察を行った。特に、Pelfka 展開

- の係数が計量や接続などの情報幾何学的構造によって表されることを明らかにした。(Yapage Nihal氏との共同研究)
- (5) 情報スペクトル理論の考え方にもとづいて、古典および量子仮説検定問題に関してきわめて一般的な状況のもとで成立する種々の数学的定理を得た。これらの結果は、量子 i. i. d 系などの特殊な場合への適用を通して、量子情報系における十分性および指数型分布族を考察する上での一つの理論的基礎を提供する。(林正人氏との共同研究)
  - (6) 量子通信路容量を漸近的に達成する符号を量子状態の仮説検定にもとづいて構成する新しい方法を示した。この成果は、量子通信と量子状態の統計的推測との関係に関する新たな知見をもたらすものである。(小川朋宏氏との共同研究)
  - (7) (古典) 情報理論において、通信路容量を数値的に計算するアルゴリズムとして Arimoto-Blahut アルゴリズムが知られている。情報幾何の観点から見ると、このアルゴリズムには指数型分布族と相対エントロピーの間の関係が本質的に関わっている。同様の観点のもとで Nagaoka (1998) によって提案された量子 Arimoto-Blahut 型アルゴリズムをさまざまなキュービット通信路に適用し、そのパフォーマンスについて詳細な検討を行った。(安藤裕太氏との共同研究)
  - (8) 情報スペクトル理論にもとづいた VF (可変長-固定長) および VV (可変長-可変長) 符号の漸近特性などに関する新しい結果を得た。(平井和也氏との共同研究)

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- (1) 安藤裕太, 長岡浩司, Qubit 通信路における量子 Arimoto-Blahut アルゴリズムに関する考察, 第 32 回情報理論とその応用シンポジウム予稿集, 437-442, 2009, 査読無.
- (2) 平井和也, 長岡浩司, VF および VV 符号化の符号化レートに関する情報スペクトルの考察, 第 32 回情報理論とその応用シンポジウム予稿集, 54-59, 2009, 査読無.
- (3) Y. Nihal and H. Nagaoka, Information geometrical approach to mean-field approximation for quantum Ising spin models, J. Phys. A: Math. Theor., 41, 065005, 2008, 査読有.
- (4) T. Ogawa and H. Nagaoka, Making good codes for classical-quantum channel coding via quantum hypothesis testing, IEEE Trans. Inform. Theory, 53, 2261-2266, 2007, 査読有.
- (5) H. Nagaoka and M. Hayashi, An Information-Spectrum Approach to Classical and Quantum Hypothesis Testing for Simple Hypotheses, IEEE Trans. Inform. Theory, 53, 534-549, 2007, 査読有.
- (6) N. Yapage and H. Nagaoka, Information geometry of mean field approximation for quantum Boltzmann machines, Proc. of Asian Conference on Quantum Information Science (AQIS), 143-144, 2006, 査読有.
- (7) 堂嶋隆幸, 片桐孝洋, 長岡浩司, 量子 i. i. d. 状態における仮説検定の漸近特性に関する数値的アプローチ, 第 29 回情報理論とその応用シンポジウム (SITA) 予稿集, 767-770, 2006, 査読無.

[学会発表] (計 8 件)

- (1) 長岡浩司, 量子情報理論の地下を流れる数学的水脈について, 第 21 回量子情報技術研究会, 2009 年 11 月 4 日, 電気通信大学(東京).
- (2) 長岡浩司, 情報スペクトルを通してみた確率・情報・エントロピー, 電子情報通信学会ソサイエティ大会, 2008 年 9 月 18 日, 明治大学(生田).
- (3) 長岡浩司, 量子情報幾何学概論, 研究会「量子論の諸問題と今後の発展」, 2008 年 3 月 21 日, 高エネルギー加速器研究機構(つくば).
- (4) 長岡浩司, 統計力学と量子情報の数理, 日本物理学会, 2007 年 3 月 21 日, 鹿児島大学.
- (5) H. Nagaoka, On the error exponents of quantum hypothesis testing, Special seminar series on quantum information, 2007 年 3 月 6 日, 国立情報学研究所(東京).
- (6) 長岡浩司, 量子状態の統計的識別に関する極限定理について, RIMS 共同研究「量子解析におけるミクロ・マクロ双対性」, 2006 年 12 月 25 日, 京都大学数理解析研究所.
- (7) H. Nagaoka, Arimoto-Blahut algorithm and its extension to quantum mechanical channels, International Symposium on Advanced Robotics and Machine Intelligence, 2006 年 10 月 9 日, 北京.
- (8) H. Nagaoka, On quantum extension of information geometry, International Workshop on Affine Differential Geometry and Information Geometry,

2006年9月3日, 四川大学(成都, 中国).

[図書] (計1件)

- (1) R. Ahlswede et al. (eds.), General Theory of Information Transfer and Combinatorics, Springer, Lecture Notes in Computer Science 4123, 2006, 分担執筆: H. Nagaoka, Some mathematical problems related to quantum hypothesis testing, pp. 1100-1103.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

長岡 浩司 (NAGAOKA HIROSHI)  
電気通信大学・大学院情報システム学研究科・教授  
研究者番号: 80192235

### (2) 研究分担者

藤原 彰夫 (FUJIWARA AKIO)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 30251359