

平成 22 年 5 月 28 日現在

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2006～2009
 課題番号：18500013
 研究課題名 (和文) 不定元を含む文字列表現を用いた実数などの連続空間の計算構造の研究
 研究課題名 (英文) Research on computable structures of continuous spaces like the real number through representation in bottomed sequences
 研究代表者
 立木 秀樹 (TSUIKI HIDEKI)
 京都大学・人間・環境学研究科・准教授
 研究者番号：10211377

研究成果の概要 (和文)： 実数空間などの連続な構造をもつ位相空間上の計算的構造について、不定元 \perp (ボトム) を含む文字列集合への埋め込みなどの手法で研究を行った。計算的に自然な埋め込みが持つべき性質 (定義の再帰性や冗長性のなさなど) を考え、そのような埋め込みを表す位相空間論的な概念を導入し、それがどのような位相空間において存在するかなどの問題について調べた。定数時間計算可能性を保存するコード変換、formal ball のなす空間の Lawson 位相と距離空間の双曲位相の関係などについても調べた。

研究成果の概要 (英文)： The computational structure of the reals and other topological spaces are studied mainly with the method of embedding a space into the set of infinite sequences with bottoms. Some computationally natural properties of an embedding, such as the recursiveness of the definition and the non-redundancy of each digit in a code sequence, are investigated through their characterization in general topological terms, and some characterizations of spaces with such an embedding are given. Other topics such as constant time computability preserving conversions, and the relation between the Lawson topology of the space of formal balls and the hyperbolic topology of a metric space, are also investigated.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	900,000	0	900,000
2007 年度	600,000	180,000	780,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,000,000	630,000	3,630,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：実数計算、グレイコード、ドメイン理論、位相空間論、不定元、双曲位相、Lawson 位相

1. 研究開始当初の背景

実数などの連続な構造をもつ空間上の計算の理論は、自然数などの可算な集合上の計算の理論と異なり、対象となる空間がもつ位相などの数学的構造との関係で考える必要がある。そして、この問題に対し、数学と計算機科学の境界で、プログラミング言語理論、ドメイン理論、解析学、位相空間論、論理学、構成的数学など、多くの分野を巻き込んだ研究が行われている。それら多様な研究者の集まりに、CCA (Computability and Complexity in Analysis) がある。詳しくは、<http://cca-net.de> を参照されたい。CCAでは、1985年から毎年国際会議等を開催しており、1995年は私が組織委員長となり、CCA国際会議を京都で開催した。

連続な空間上の計算構造を考える代表的な手法に、Type2マシンと呼ばれるCantor集合上で動作するようにチューリングマシンを拡張した機械と、Cantor集合と目的の集合とを結びつける、表現と呼ばれる全射部分関数を通じて行うTTE (Type 2 Theory of Effectivity) と呼ばれる手法がある。TTEは、CCAの創始者であるHagen大学のKlaus Weihrauch教授を中心としたグループで活発に研究が行われている、標準的な理論である。しかし、TTEの表現関数は1対1ではなく、Type2マシンが直接実数などの連続データにアクセスしているとは考えられない。そのため、空間のもつ計算的な性質は、表現の性質として現れることになる。その中でも、admissibleと呼ばれる性質をもつ表現は、空間の位相的構造に基づく計算とCantor集合上の計算とを素直に結びつけており、もっとも自然な計算的概念となっている。

それに対し、私は、(TCS, 2002)の論文で、文字集合に不定元 \perp (ボトム) 導入した $\{0, 1, \perp\}$ の無限列空間を考えることにより、実数空間をこの拡張された文字列空間に埋め込めること(グレイコード埋め込み)を示し、この拡張された文字列を入出力するマシン概念(IM2マシン)を導入し、これらを用いて定義される計算概念が、標準的なadmissible表現によるものと一致することを示した。そして、この計算概念に関する研究をさらに深めるため、2003年度から2006年度までの計画で基盤研究(C)「実数のグレイコード表現とそれにより導かれる計算構造の研究」の研究を申請した。その中で、この計算理論を一般の距離空間に拡張し、空間を表現するのに必要な \perp の数が空間の位相的な次元と一致することを示した。また、IM2マシンの計算を実現するためのプログラミング言語の機能を考え、並列論理型言語での実現や、関数型言語に対する拡張について研究を行ってきた。さらに、この拡張された文字列空間へ

の埋め込みを位相空間論的に表現する道具としてdyadic subbaseを導入し、その中でも無駄のない表現に対応するindependent subbase等の概念を導入し、それらの関係を調べた(Topology Proceedings, 2004)。

2. 研究の目的

本研究は、上記の基盤研究(C)に対し、研究計画最終年度前年度の応募をして受理されたものである。位相空間のボトム入り文字列表現を中心とした手法を用いて、実数および連続な空間の計算的性質について調べることを目的としている。

(Topology Proceedings 2004)で述べたように、この拡張された文字列空間への位相空間の埋め込みによるコーディングの中で計算的に好ましい性質を持つものは、位相空間論の言葉でdyadic subbaseとして特徴づけることができる。その中でも、表現の文字列に冗長性がないという意味で効率的な表現である、independent subbaseがどの空間に対して存在するのかが興味深い問題である。また、有限のプログラムで制御しながら計算を行うためには、コード自体に再帰的な構造が不可避である。再帰的な構造は力学系を通して定義するのが自然であり、そのようなコードは空間上にフラクタルな構造を導出する。そのような構造がどのような位相空間で可能であるか考えるのは重要であるし、そのようなボトム入り文字列により生成されるドメイン構造や、項のなすグラフ的な構造を扱う計算の仕組みについて考えることも重要である。

位相空間の計算構造を定義する方法に、対象となる空間をドメインに埋め込む、ドメイン表現の考え方がある。ボトム入り文字列表現が導出するドメイン表現は興味がある。また、対象となる空間を極限要素集合とするドメイン表現はドメイン環境と呼ばれ、位相空間の計算的構造を考える有効な手段として多く研究されている。ドメイン環境についても研究をすすめたい。

また、グレイコード表現は2進表現より、有限時間計算可能な関数が多いという特徴を持っている。この性質がどこに由来しているかも興味深い問題である。

3. 研究の方法

この研究は、数学と計算機科学にまたがっており、数学的な知識や洞察力を持った人との共同研究が不可欠である。幸い、今までトポロジー関係の研究集会で研究発表を行い、議論を進めてきた中で、島根大学の服部泰直教授、静岡大学の太田春外教授、京都産業大

学の山田修司教授に興味を持ってもらうことができた。そこで、これらの方々とメールで議論を行い、互いの訪問をしてセミナーを行うなどして、共同研究をすすめた。

また、京都産業大学のCCAの研究グループ（八杉真利子名誉教授、森隆一教授、辻井芳樹教授）とは、多くの研究上の興味を共有しており、場所的にも近い。そこで、定期的に勉強会を行い、計算に関係して現れる関数のグラフのフラクタル構造などについて、共同して研究を行った。

また、期間中に、Siegen大学のDieter Spreen教授とDarmstadt工科大学のKlaus Keimel教授を、本学の客員教授として招聘することができた。これら、計算可能性解析学やドメイン理論において中心的な研究者と議論は、非常に有効であった。

CCA国際会議や、Dieter Spreenらを中心として隔年で行われているDagstuhl seminarは重要な発表の場である。Topology, Domain Theory, 構成的数学、プログラミング言語理論など、この研究に興味を持ってもらえる研究コミュニティは多い。そこで、そのような研究集会にて、積極的に研究発表を行った。

4. 研究成果

(1) Independent Subbase を持つ空間の特徴づけ（大田春外氏、山田修司氏との共同研究）

ω から $\{0, 1, \perp\}$ への関数のことを、ボトム入り無限列という。ボトム入り無限列全体の集合を $\{0, 1, \perp\}^\omega$ で表す。 $\{0, 1, \perp\}$ の上に、 $\{0\}$ と $\{1\}$ から生成される位相を考え、その積位相を $\{0, 1, \perp\}^\omega$ 上に考える。ボトム入り無限列の中で、0および1を有限個しか含まないものを、ボトム入り有限列という。ボトム入り有限列 σ に対し、 σ が0か1の値をとるインデックスの集合を $\text{dom}(\sigma)$ と書く。

位相空間 X に対し、 X のregular open setのペアの列 $S_{n,i}$ ($n < \omega$, $I < 2$)で、 $S_{n,0}$ と $S_{n,1}$ が互いにexteriorであり、全体が X のsubbaseをなしているものごとを、Dyadic Subbaseという。

Dyadic Subbase S に対し、 X から $\{0, 1, \perp\}^\omega$ への次の関数 ϕ を考える。

$$\begin{aligned} \phi(x)(n) &= 0 && (x \in S_{n,0} \text{ のとき}) \\ \phi(x)(n) &= 1 && (x \in S_{n,1} \text{ のとき}) \\ \phi(x)(n) &= \perp && (\text{それ以外のとき}) \end{aligned}$$

すると、 ϕ は、 X から $\{0, 1, \perp\}^\omega$ への位相的な埋め込みになる。このように定義すると、 $\phi(x)(n) = \perp$ である x の集合は $S_{n,0}$ と $S_{n,1}$ の境界であり、nowhere denseである。 X の点 x の計算は、 x を含む開集合の縮小列を無限

に出力するものととらえることができる。すると、 x の計算は、 $\phi(x)(n) = \perp$ であることを決定することはできない。つまり、 \perp は、そのビットの値が計算不能であることを意味し、プログラミング意味論における \perp の意味と一致する。よって、Dyadic subbaseによって定義される埋め込みは、計算的にも自然なものと考えられる。

Dyadic subbase S に対し、

$$\begin{aligned} S(\sigma) &= \bigcap_{k \in \text{dom}(\sigma)} S_{k, \sigma(k)} \\ \text{bar}S(\sigma) &= \bigcap_{k \in \text{dom}(\sigma)} \text{cl } S_{k, \sigma(k)} \end{aligned}$$

と定義する。その時、 $\text{bar}S(\sigma) = \text{cl } S(\sigma)$ を満たすdyadic subbaseをproperであるという。ここでは述べないが、Properなdyadic subbaseは、位相的な性質を文字列操作的に考える上で、いい性質を持っている。

Proper dyadic subbase S で、任意のボトム入り有限列 σ に対し、 $S(\sigma)$ が空集合でないようなものをindependent subbaseという。Independent subbaseは、各インデックスの意味が独立しており、各点を意味する無限列の中に冗長性がないことを意味している。

この研究の第一の成果は、dense in itselfな可分距離空間は全てindependent subbaseを持つことを示したことである。さらに、independent subbaseの次元の概念を定義し、距離空間の次元と同じ次元を持つindependent subbaseを構成できることを示したことである。この次元概念は、空間の表現に必要なボトムの個数を意味し、それは、空間をアクセスするために機械に必要な余分なヘッド数という計算的概念と結びついている。

この研究は、論文を昨年3月に投稿し、まだ査読中である。また、これと関連して、dyadic subbaseによって導出されるドメイン表現についても研究を行い、学会発表[1]で発表を行った。

Dyadic Subbase および independent subbaseは、位相空間を文字列で表現することを可能としている。この文字列表現を通じて位相空間の構造についてどれだけのことを（計算的に）示せるのか、興味をもって、研究を続けていくつもりである。

(2) Sierpinski Gasket 上に再帰的に定義された independent subbase の研究（山田修司氏との共同研究）

Sierpinski Gasketは、3つの縮小写像から構成されるフラクタルである。それに対し、independent subbaseは、2つの部分への分割を基本としている。Sierpinski Gasket上にもIndependent subbaseが存在していることは(1)の研究から分かるが、 $[0, 1]$ 区間の

Gray Subbase がそうであるように、再帰的に構成を記述できるような subbase が存在しているかどうかは分かっていなかった。本研究では、コンピュータの力を借りて、その構成方法を見出した。それは、3つの縮小像を、まず1つと2つに分け、2つの方は、次の文字でさらに2つに分けるという方法である。つまり、3つの縮小方法が、文字列的には、前に1, 01, 00 という3種類の文字をつけることにより実現されている。それに、図形の回転やコードの反転を組み合わせることにより、境界部分でのコードを1文字だけの差にすることができる。そして、次元1の independent subbase を構成できる。

この構成方法のエlegantさを、何らかの抽象的な理論として構成できないか、他に同じような再帰的構造の構成例はないか、力学系として何を意味しているかなどの視点で考えると、面白いことが分かるのではないかと期待している。

この研究は、数理解析研究所の研究集会にて学会発表[2]を行い、その考究録に雑誌論文[1]を寄稿した。

(3) 力学系に由来する subbase の研究。

Independent Subbase の概念は、ボトム入り文字列でのコードづけが可能であるということだけしか述べていなかった。それに対し、そのコードを用いて計算を行うには、再帰的構造が必要となる。その中でも、コードを1ビットずらす操作が、自己相似写像をなしており、その相似像に対して再帰的に計算を行うのがもっとも単純であろう。そのような考えのもと、力学系に由来する subbase の概念を、以下のように定義した。

可分距離空間 X に対し、 X 上の $2:1$ 写像 f で、 X_0 と X_1 というお互いに exterior である2つの開集合に対し、 f を X_i の閉包に制限したものが、 X_i の閉包と X の同相写像になるものが与えられたとする。 $S_{n,i}$ ($n < \omega, i < 2$) が f の力学系に由来する subbase であるとは、 $S_{n,i} = f^n(X_i)$ ($i < 2$) を満たす subbase であることである。

そのうえで、力学系に由来する subbase の満たす性質について考え、特に、単位閉区間 I と単位正方形 I^2 上の力学系に由来する subbase について調べた。

単位閉区間 I 上で、Gray subbase はテント関数の力学系に由来する subbase である。そして、 I 上の力学系に由来する subbase は、conjugate なものを同一視すると、これだけである。 I^2 上の力学系に由来する subbase は2つのタイプのものがある。

この研究は、学会発表[5]において発表した。 I^2 上の力学系に由来する subbase については、研究を継続中である。

(4) Formal ball 空間の Lawson 位相と距離空間の双曲位相との関係の研究 (服部泰直氏との共同研究)

距離空間 (X, d) 上の Formal ball 空間 B^*X とは、 X と R^+ との直積の上に、順序 $(x, r) \leq (y, s)$ を、 $d(x, y) \leq r-s$ で入れた部分順序集合である。これは、 x を中心、半径 r の仮想的な円の間での包含関係の順序を反対にしたものと言える。Formal ball 空間は、順序集合として、その上に Scott 位相や Lawson 位相といった位相を考えることができる。これら2つの位相は、 B^*X の極大要素集合の上で一致し、 X と同相となることが知られている。このような、順序集合の極大要素集合としての位相空間の表現は、位相空間のドメイン環境と呼ばれている。Formal Ball 空間は、もっとも単純なドメイン環境の一つである。

Formal ball 空間を、 X と R 全体の直積に拡張した、一般化した Formal ball 空間 BX を考える。順序は同じように入れるとする。すると、 BX には、一方では X と R のユークリッド位相の直積位相が入る。また、 BX の上には、順序集合として Lawson 位相が入る。 X が可分距離空間のとき、 BX の Lawson 位相は、一種の Dyadic subbase により定義されていると考えることができることを注意しておく。

本研究では、まず、この直積位相と Lawson 位相の関係について調べた。そして、元の距離が全有界の時には両者が一致すること、一致しない距離空間の例が存在することを示した。さらに、 BX において、Lawson 位相の、各 subbase の要素の境界への Lawson 位相の制限を考えることにより、距離空間上に、距離位相とは異なる位相が定義できることが分かった。これを、双曲位相となづけた。双曲位相は、 $\theta_{x,y,t} = \{z : d(x,z) - d(y,z) < t\}$ を subbase とする位相である。そして、双曲位相と距離位相が X 上で一致することと、 BX において Lawson 位相と直積位相が一致することが、同値であることを示した。

次に、距離空間上のこの2つの位相が、通常の数学によく現れる距離空間で一致するかどうか調べた。その中でも、 l_p ($1 \leq p \leq \infty$) について調べる中で、線形ノルム空間において、以下のようなきれいな特徴づけができることが分かった。ノルム線形空間 $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ を考える。

1. もし、 $1 < p < \infty$ なら、両者は一致する。
2. $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ の時には、 $\mu(\Omega)$ が 0 であるか、 Ω が有限個のアトムによる分解を持つ時、一致する。
3. $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ の時には、 $\mu(\Omega)$ が 0 であるか、 Ω にアトムが存在する時、一致する。

これらの研究成果は、学会発表[10], [11]で発表した後、雑誌論文[7], [3]にて発表した。

双曲位相の応用を考えること、位相空間の bitopological な表現との関係について考えることなど、これからの課題である。

(5) 定数時間計算可能性を保存する変換について (山田修司氏との共同研究)

定数時間計算可能な無限文字列空間上の関数とは、入力のある接尾辞をそのまま出力のある接尾辞として用い、どの入力に対しては入力の何文字目からを出力の何文字目からに使用すればいいかということが計算的に求まる関数である。ある表現においてある関数が定数時間計算可能な無限文字列空間上の関数として実現できる時、その関数とその表現に関して定数時間計算可能であるという。

2進表現において、 $1-x$ という関数は定数時間計算可能ではないが、Gray 表現においては定数時間計算可能である。一方、2進表現において定数時間計算可能な関数は、Gray 表現でも定数時間計算可能であることが分かる。このことは、2進コードから Gray コードへの変換が定数時間計算可能性を保存するという性質から導かれる。

このことを一般化するため、定数時間計算可能な変換を特徴づける研究を行った。

まず、全域的に定義された定数時間計算可能性を保存する変換 α は、次の関数方程式を満たすことを示した。

$$\alpha(x) = g(x) \cdot \alpha(x \uparrow 1) \uparrow \mu(x).$$

ここで、 g は有限文字列を返す計算可能関数、 μ は自然数を返す計算可能関数、 $x \uparrow n$ は x の先頭から n 文字を取り除いた接頭辞である。このように、定数時間計算可能性を保存する変換は、入力の無限文字列から、その時の出力と、残りの計算結果から先頭の何文字を読み飛ばすかという値 n を計算した上で、先頭の文字を除いた残りに対して同じ計算を行い、その計算結果から n 文字を読み飛ばすという計算過程を経る。これは、簡単にプログラム可能である。

そして、求める変換は、この関数方程式の最小不動点であることを証明し、それにより、定数時間計算可能性を保存する変換という概念と、拡張されたスライディングブロック関数という概念が一致することを示した。

ここで定義した定数時間計算可能性を保存する変換は、入力のある接尾辞が同じなら、出力の接尾辞もどこかから同じになるという、suffix identity を保存するという性質を持っている。この概念は、無限文字列上の計算に関して興味深い問題を提供していると期待し、引き続き研究を続ける予定である。

この結果は、学会発表[9]と[7], [6]で講演

を行った後、雑誌論文[4]で extended abstract, [6]で論文を発表した。また、学会発表[3]の招待講演でも話をした。

(6) 計算に関係したフラクタル構造の研究 (八杉真利子氏、辻井芳樹氏、森隆一氏との共同研究)

実数上の計算に関係して現れるフラクタル構造に関して研究を行った。相互再帰的に定義されたフラクタル、および、無限個の縮小写像で定義されるフラクタルは、ある種の Fine-Computable な不連続関数のグラフとして自然に現れる。これらの構造について調べた (学会発表[8]および雑誌論文[5])。

また、フラクタルを描画するアルゴリズムである、Random Iteration Algorithm を、相互再帰的に定義されたフラクタルに拡張した (学会発表[4], 雑誌論文[2])。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

[1] Hideki Tsuiki and Shuji Yamada, Independent Subbases of the Sierpinski Gasket, 京都大学数理解析研究所講究録 to appear, 2010, 査読なし。

[2] Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Mariko Yasugi and Hideki Tsuiki. Random Iteration Algorithm for Graph-Directed Sets. In 6th International Conference on Computability and Complexity in Analysis Proceedings, Andrej Bauer, Peter Hertling, and Ker-I Ko (Eds.), Schloss Dagstuhl - Leibniz Center for Informatics, to appear, 2010, 査読あり。

[3] Yasunao Hattori and Hideki Tsuiki, Hyperbolic topology of normed linear spaces. Topology and its applications, 157, 77-82, 2010, 査読あり。

[4] Hideki Tsuiki and Shuji Yamada. On Finite-time Computability Preserving Conversions. Journal of Universal Computer Science 15(6):1365-1380, 2009, 査読あり。

[5] Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Mariko Yasugi and Hideki Tsuiki. Fine-Continuous Functions and Fractals Defined by Infinite Systems of Contractions. In Infinity in

Logic and Computation, International Conference ILC2007 Selected Papers, Lecture Notes in Computer Science 5489, 109-125, 2009, 査読あり。

[6] Hideki Tsuiki and Shuji Yamada. On Finite-time Computability Preserving Conversions, Electric Notes in Theoretical Computer Science 221, 299-308, 2008, 査読あり。

[7] Hideki Tsuiki and Yasunao Hattori. Lawson topology of the space of formal balls and the hyperbolic topology. Theoretical Computer Science, 405(1-2): 198-205, 2008, 査読あり。

[学会発表] (計 11 件)

[1] Hideki Tsuiki, Domain Representations Derived from Dyadic Subbases, Workshop on Constructive Aspects of Logic and Mathematics, 2010/3/8-12, Kanazawa, Japan.

[2] 立木秀樹, Independent Subbases of the Sierpinski Gasket, RIMS研究集会「一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーに関する研究」, 2009/10/14-16, 京都

[3] Hideki Tsuiki, Finite-time Computability Preserving Conversions, 5th International Symposium on Domain Theory, 2009/9/12-14, Shanghai, China.

[4] Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Mariko Yasugi and Hideki Tsuiki. Random Iteration Algorithm for Graph-Directed Sets. 6th International Conference on Computability and Complexity in Analysis, 2009/8/18-22, Ljubljana, Slovenia.

[5] Hideki Tsuiki, $\{0, 1, \perp\}$ -codings Derived from Dynamical Systems. Continuity, Computability, Constructivity Workshop, 2009/6/14-18, Koeln, Germany.

[6] 立木秀樹、山田修司. On Finite-time Computability Preserving Conversions. 題 11 回日本ソフトウェア科学会プログラミング及びプログラミング言語ワークショップ(PPL2009), 2009/3/9-11, 高山

[7] Hideki Tsuiki and Shuji Yamada. On Finite-time Computability Preserving Conversions. 2008/8/21-14, Hagen, Germany.

[8] Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Mariko Yasugi and Hideki Tsuiki, Fractals Defined by Infinite Contractions and Mutual-Recursive Sets, 2007/11/03-05. Cape Town, South Africa University of Cape Town.

[9] Hideki Tsuiki, Shuji Yamada: "On Finite-time Computable Functions" International Conference on Infinity in Logic & Computation. 2007/11/03-05. Cape Town, South Africa University of Cape Town.

[10] Hideki Tsuiki, Lawson Topology of the space of formal balls and the hyperbolic subbase 2006/8/20-25, Dagstuhl Seminar 06341, Computational Structures for Modelling Space, Time and Causality Dagstuhl, Germany

[11] Hideki Tsuiki, Lawson Topology of the space of formal balls and the hyperbolic subbase, 2006/6/23-26, International Conference on Topology and its Applications, Aegion, Greece.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

立木 秀樹 (TSUIKI HIDEKI)

京都大学・人間・環境学研究科・准教授
研究者番号：10211377

(2) 研究分担者

なし。

(3) 連携研究者

なし。

(4) 研究協力者

服部 泰直	島根大学総合理工学部教授
大田 春外	静岡大学教育学部教授
山田 修司	京都産業大学理学部教授
八杉 真理子	京都産業大学名誉教授
辻井 芳樹	京都産業大学理学部教授
森 隆一	京都産業大学理学部教授