

平成 21 年 5 月 25 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18500183

研究課題名（和文） 時間的・空間的に特徴を持つオンライン学習の統計力学的解析

研究課題名（英文） Statistical mechanical analysis of on-line learning with spacio-temporal characteristics

研究代表者

三好 誠司 (MIYOSHI SEIJI)

関西大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：10270307

研究成果の概要：

教師機械が時間的に動くモデル、生徒機械を時間方向に組み合わせる集団学習のモデル、教師機械が複数存在するモデルなど、時間的あるいは空間的な観点で興味深く、また統計的学習の基礎理論と応用の両面への波及効果が大きいと思われるいくつかのモデルについて、学習機械の汎化能力をオンライン学習の枠組みで統計力学的手法を用いて理論的に解析した。その結果、多くの興味深い結果が明らかになった。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	800,000	0	800,000
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	570,000	3,270,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・感性情報学・ソフトコンピューティング

キーワード：機械学習，統計的学習理論，オンライン学習，汎化誤差，統計力学，アンサンブル学習

## 1. 研究開始当初の背景

オンライン学習については 1990 年代以降にたとえば D. Saad、M. Oppen、M. Biehl、P. Riegler、J. K. Anlauf、J. Inoue、Y. Kabashima、H. Nishimori らによって統計力学的手法を用いた解析が行われてきた。その多くは、パーセプトロンの入力次元が十分大きい場合に成り立つ“自己平均性”をもとに系の巨視的変数のダイナミクスを記述する連立微分方程式を導出するスタイルを

とっている。一方、アンサンブル学習は 1990 年代後半以降にたとえば Y. Freund、R. E. Schapire、L. Breiman、A. Krogh、P. Sollich らによって研究されてきた。研究代表者らは以前からこれらの先行研究の結果をふまえてオンライン学習の枠組みで統計力学的手法を用いることによりアンサンブル学習の解析を行っていた。

## 2. 研究の目的

時間的あるいは空間的な観点で興味深く、また統計的学習の基礎理論と応用の両面への波及効果が大きいのと思われるいくつかのモデルについて、学習機械の汎化能力をオンライン学習の枠組みで統計力学的手法を用いて理論的に解析する。観測データの背後にあるデータ生成過程のモデル化のことを一般に学習と呼ぶ。学習は、教師付き学習と教師無し学習に大別され、教師付き学習はバッチ学習とオンライン学習に大別される。バッチ学習では、与えられた一定数の入力と教師の出力すなわち正解の組（例題）について、生徒は繰り返し学習する。これに対して、オンライン学習においては一つの例題が与えられたら、生徒はそれに応じてすぐに自分自身のパラメータ（結合荷重など）を変化させ、その例題は忘れてしまって二度と使わない。オンライン学習は、過去に出てきた例題についても必ずしも確実に答えられないという欠点があるものの、学習時間や記憶容量の点でメリットが大きい。また、教師の構造が時間とともに変化する場合などのように時間とともに環境が変化しても追従できる。本研究ではオンライン学習のこの特長に特に着目する。未知の入力に対する教師と生徒の誤差の期待値は汎化誤差と呼ばれる。統計的学習理論の目的のひとつはこの汎化誤差を理論的に計算することである。本研究では、時間的あるいは空間的な観点で興味深いいくつかのモデルについて生徒の汎化誤差を解析することを目的としたが、例として3つのモデルを取り上げて以下に述べる。

(1) 教師が動く場合 教師と生徒の構造や出力特性の違い、あるいは雑音の存在などのために汎化誤差がゼロに漸近しない場合は学習不能な場合と呼ばれるが、学習不能場合には生徒が教師と一定のへだたり（方向余弦）を保ったまま動き続ける場合がある。ここでこの動き続ける学習機械を教師とするような新たな生徒を考える。つまり、真の教師—動く教師—生徒、という3階層のモデルを考える。このモデルにおいて生徒が真の教師に対してどれくらいの汎化能力を持つことができるかを理論的に明らかにする。このモデルでは生徒から真の教師の出力は直接には見えないことがポイントとなる。

(2) 時間方向アンサンブル学習 精度の低い学習機械を多数組み合わせることにより精度の高い分類を行おうとすることは一般にアンサンブル学習と呼ばれるが、生徒が教師のまわりを動き続けるモデルでは、一人の生徒に着目し、異なる時刻のこの生徒自身のコピーを組み合わせることにより性能を改善できる可能性がある。すなわち、通常のアンサンブル学習は空間方向の組み合わせを考

えるのであるが、発想を転換し、時間方向の組み合わせを考える。この場合の汎化能力を理論的に明らかにする。

(3) 教師が複数存在する場合 生徒が出力を観測できる教師がひとつではなく、複数存在する場合を考える。このとき複数の教師達は真の教師を中心にその周囲に存在するものとする。生徒は複数の教師の出力を順番に、あるいはランダムに観測して学習する。このとき、教師の数や教師の多様性と生徒の汎化能力の関係を理論的に明らかにする。以上では時間的、空間的な観点から特徴を持つモデルの例を3つあげたが、これら以外のモデル、あるいはこれらを組み合わせたモデルの解析にも積極的に挑戦する。なお、学習機械としては理論的な取り扱いが比較的容易で、かつ、なるべく一般的なモデルで理論を構築したいという意味から、線形パーセプトロンと非線形パーセプトロン（単純パーセプトロン）を考える。また、学習則としては線形パーセプトロンの場合には勾配法を、非線形パーセプトロンの場合にはヘブ学習、パーセプトロン学習、アダルトン学習を考える。

### 3. 研究の方法

#### (1) モデルの設定

教師や生徒は線形なパーセプトロンであるとする。すなわち、結合荷重と入力の積和をそのまま出力する。結合荷重の初期値や入力はガウス分布にしたがい独立に生成されるものとする。また、本来は確率的なダイナミクスを決定論的な連立微分方程式で記述するために、結合荷重や入力の次元が無限大の熱力学的極限を考えるものとする。さらに、以下で述べる自己平均性を仮定するために、教師や生徒の結合荷重のノルムが入力のノルムより十分大きい場合を考える。

#### (2) 巨視的変数のダイナミクスを記述する決定論的な連立微分方程式の導出

モデルのダイナミクスを少数の巨視的変数で記述する。具体的には、生徒の長さや生徒と教師の類似度（方向余弦）が巨視的変数となる。これらのダイナミクスを記述する連立微分方程式を統計力学的手法に基づき導出する。この研究で扱うモデルでは、教師や生徒の結合荷重のノルムが入力のノルムより十分大きいので、本来は確率変数である入力の影響をその平均で置き換えることができる。この考え方を統計物理では自己平均性と呼ぶ。その結果、連立微分方程式は決定論的な形で導出されることになる。

#### (3) サンプル平均の計算

導出された決定論的連立微分方程式には

いくつかのサンプル平均、すなわち確率変数を入力に関して平均したものが含まれている。これを解析的に計算する。非線形パーセプトロン（単純パーセプトロン）の場合にはこのサンプル平均を計算するために複雑なガウス積分を実行しなければならないが、それが解析的に求まらない場合も多いのであるが、線形なパーセプトロンの場合は通常はサンプル平均を解析的に容易に求めることができる。

#### (4) 微分方程式を解析的に解く

解析的に求められたサンプル平均を連立微分方程式に代入し、これを解くことにより、巨視的変数のダイナミクスが理論的に求められる。非線形パーセプトロン（単純パーセプトロン）の場合には仮にサンプル平均が解析的に求まっても、それらを代入した連立微分方程式は解析的に解けない場合も多いのであるが、線形パーセプトロンの場合は連立微分方程式が解析的に解ける場合が多い。

#### (5) 汎化誤差の計算

統計的学習理論の重要な目的のひとつは、未知の入力に対する誤差の期待値、すなわち汎化誤差を理論的に計算することである。解析的に、あるいは数値的に求められた巨視的変数を用いて汎化誤差を計算する。ここでも非線形パーセプトロン（単純パーセプトロン）の場合にはガウス積分を数値的に実行しなければならない場合が多いが、線形パーセプトロンの場合は解析的に計算できる場合が多い。

#### (6) 計算機実験の実行

以上の理論解析と並行して計算機実験を行う。その場合、結合荷重や入力の次元を無限大とすることはできないので、 $10^3 \sim 10^4$ 次元で実行することになる。また、汎化誤差の計算のためには  $10^6 \sim 10^8$  個程度のランダム入力を生成し、それらに対する誤差の平均をとることになる。このあたりは、10年前であればスーパーコンピュータが必要であった計算量であるが、現在は標準的なPCで容易に実行することができる。このような観点からも本研究課題はタイムリーであると言える。

#### (7) 検証と考察

理論解析の結果と計算機実験の結果を比較検討することにより理論の正当性を検証する。また、計画通り巨視的変数や汎化誤差が解析的に得られたならば、汎化誤差が発散しない条件や時間が十分経過した後の定常状態、残留汎化誤差についても理論的な洞察が行える可能性が高いので、検討・考察を行う。

## 4. 研究成果

(1) オンライン学習の枠組みで、生徒を時間方向に組み合わせる学習（時間方向アンサンブル学習）の汎化能力について統計力学的手法を用いた理論的解析を行った。まず、学習機械が線形パーセプトロンであり、それらの出力に分散が既知のガウス雑音が重畳される場合について解析した。巨視的変数のダイナミクスを記述する連立微分方程式を熱力学的極限における自己平均性にに基づき決定論的な形で導出した。それらは解析的に解くことが可能であり、汎化誤差を理論的に計算することができた。その結果、生徒を時間方向に組み合わせることにより汎化能力を改善することができることが明らかになった。特に、通常アンサンブル学習と比較した場合、時間方向アンサンブル学習は2倍の効果があることが明らかになった。次に、学習機械が非線形パーセプトロン（単純パーセプトロン）である場合についても同様な手法で解析した。線形パーセプトロンと異なり、非線形パーセプトロンでは、巨視的変数のダイナミクスを記述する連立微分方程式に現れるサンプル平均を計算するために複雑なガウス積分を実行しなければならないが、教師が非単調な出力特性を持ち、生徒が学習則としてパーセプトロン学習を使う場合について巨視的変数のダイナミクスを数値的に求めた。その結果、線形な場合とは異なり、生徒の汎化能力が非単調なダイナミクスを有すること、異なる時刻の生徒を組み合わせることにより汎化能力を大幅に改善できることなど興味深い事実が明らかになった。

(2) オンライン学習の応用を考えると、同時に使う例題に相関がある場合の解析を行うておくことは非常に有意義である。そこで、オンライン学習の枠組みで、入力が相関を持つような場合の学習について統計力学的手法を用いた理論解析を行った。学習機械が線形パーセプトロンであり、それらの出力に分散が既知のガウス雑音が重畳される場合について解析した。巨視的変数のダイナミクスを記述する連立微分方程式を熱力学的極限における自己平均性にに基づき決定論的な形で導出した。それらは解析的に解くことが可能であり、汎化誤差のダイナミクスを理論的に求めることができた。学習アルゴリズムとして勾配法を使った場合には同時に使う入力間の相関が大きいほど、また、同時に使う入力の数が多いほど、学習係数が満たすべき条件が厳しくなることが明らかになった。そこで、新たな学習則としてブロック直交射影学習を提案し、その理論を導出した。その結果、ノイズがない場合には同時に使う入力間の相関の影響をうけず、学習速度は同時に使

う入力の数に比例することが明らかになった。一方、ノイズがある場合には同時に使う入力間の相関が大きいほど学習が遅くなり、残留汎化誤差も大きくなることが明らかになった。

(3)単純パーセプトロンの学習則としてはヘブ学習、パーセプトロン学習、アダルトン学習がよく知られているが、我々は新たに同時摂動形学習を用いる場合について、オンライン学習の枠組みで統計力学的手法を用いた理論解析を行った。巨視的変数のダイナミクスを記述する連立微分方程式を熱力学的極限における自己平均性に基づき決定論的な形で導出し、それらを数値的に解くことにより汎化誤差のダイナミクスを理論的に求めることができた。その結果、この場合の汎化誤差は例題数の $-1/3$ 乗で減少するダイナミクスを有し、これはパーセプトロン学習と同じであることが明らかになった。

(4)線形パーセプトロンである生徒モデルが複数の教師モデルをゆっくり切り替えながら学習する場合についても同様の手法を用いて解析を行った。この場合は汎化誤差のダイナミクスが解析的に得られた。教師の数の違いによるダイナミクスの違いは切り替え時間が短いほど大きいことが明らかになった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計11件)

- ① Hara, K., Miyoshi, S., Uezu, T., and Okada, M.,  
Analysis of Ising spin neural network with time-dependent Mexican-hat-type interaction,  
Lecture note in Computer Science, Springer, 査読有, 2009. (in press)
- ② Miyoshi, S., Hikawa, H., and Maeda, Y.,  
Statistical mechanical analysis of simultaneous perturbation learning,  
IEICE transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, Vol. E92-A, No. 7, July 2009. (in press)
- ③ Miyoshi, S. and Okada, M.,  
Effect of slow switching of ensemble teachers in on-line learning,  
Journal of the Physical Society of Japan, 査読有, Vol. 78, No. 5, 053001 (4

pages), May 2009.

- ④ Seki, C., Sakurai, S., Matsuno, M. and Miyoshi, S.,  
A theoretical analysis of on-line learning using correlated examples,  
IEICE transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, Vol. E91-A, No. 9, pp. 2663-2670, Sep. 2008.
- ⑤ Uezu, T., Miyoshi, S., Izuo, M. and Okada, M.,  
Theory of time domain ensemble on-line learning of perceptron under the existence of external noise,  
Journal of the Physical Society of Japan, 査読有, Vol. 76, No. 11, 114006 (8 pages), Nov. 2007.
- ⑥ Utsumi, H., Miyoshi, S. and Okada, M.,  
Statistical mechanics of nonlinear on-line learning for ensemble teachers,  
Journal of the Physical Society of Japan, 査読有, Vol. 76, No. 11, 114001 (6 pages), Nov. 2007.
- ⑦ 三好誠司,  
[解説] オンライン学習の統計力学的解析, システム/制御/情報 (システム制御情報学会誌), 査読有, Vol. 51, No. 5, pp. 216-223, May 2007.
- ⑧ Urakami, M., Miyoshi, S. and Okada, M.,  
Statistical mechanics of on-line learning when a moving teacher goes around an unlearnable true teacher,  
Journal of the Physical Society of Japan, 査読有, Vol. 76, No. 4, 044003 (5 pages), Apr. 2007.
- ⑨ Miyoshi, S. and Okada, M.,  
Statistical mechanics of linear and nonlinear time-domain ensemble learning,  
Journal of the Physical Society of Japan, 査読有, Vol. 75, No. 12, 124002 (6 pages), Dec. 2006.
- ⑩ Miyoshi, S., Uezu, T. and Okada, M.,  
Statistical mechanics of time-domain ensemble learning,  
Journal of the Physical Society of Japan, 査読有, Vol. 75, No. 8, 084007 (6 pages), Aug. 2006.
- ⑪ Miyoshi, S. and Okada, M.,

Statistical mechanics of online learning for ensemble teachers, Journal of the Physical Society of Japan, 査読有, Vol.75, No.4, 044002 (6 pages), Apr. 2006.

[学会発表] (計30件)

- ① 三好誠司,  
[招待講演] ベイズ統計に基づく画像処理,  
東京大学大学院 新領域創成科学研究科 第1回学融合ビジュアルイゼーションシンポジウム, 東京大学柏キャンパス, 2009.5.15
- ② Yuuki Taki, Hiroomi Hikawa, Seiji Miyoshi and Yutaka Maeda,  
Hand sign recognition system based on hybrid network classifier,  
Proc. 2009 International Conference on Neural Networks (IJCNN2009), Atlanta, USA, June 16, 2009. (accepted)
- ③ Akira Onoo, Hiroomi Hikawa, Seiji Miyoshi and Yutaka Maeda,  
On automatic generation of VHDL code for self-organizing maps,  
Proc. 2009 International Conference on Neural Networks (IJCNN2009), Atlanta, USA, June 15, 2009. (accepted)
- ④ Yutaka Maeda, Naoto Matsushita, Seiji Miyoshi and Hiroomi Hikawa,  
On simultaneous perturbation particle swarm optimization,  
Proc. 2009 IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE CEC 2009), Trondheim, Norway, May 21, 2009. (accepted)
- ⑤ Hara, K., Miyoshi, S., Uezu, T., and Okada, M.,  
Analysis of Ising spin neural network with time-dependent Mexican-hat-type interaction,  
Proc. 15th International Conference on Neural Information Processing (ICONIP2008), Auckland, New Zealand, Nov. 26, 2008.
- ⑥ Miyoshi, S.,  
[Invited talk] A statistical mechanical analysis of on-line learning: Many teachers or few teachers ?,

Proc. 7th Int. Symp. of Global Renaissance by Green Energy Revolution, 21st Century COE Program, Nagaoka, Japan, Sep. 29, 2006.

- ⑦ Miyoshi, S. and Okada, M.,  
Statistical mechanics of online learning for ensemble teachers,  
Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks (IJCNN2006), Vancouver, Canada, July 17, 2006.

[その他]

ホームページ

<http://www2.ipcku.kansai-u.ac.jp/~miyoshi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三好 誠司 (MIYOSHI SEIJI)

関西大学・システム理工学部・准教授

研究者番号: 10270307