

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540008

研究課題名 (和文) ホップ代数とその量子代数学への応用

研究課題名 (英文) Hopf algebras and their applications to quantum groups

研究代表者

竹内 光弘 (TAKEUCHI MITSUHIRO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授

研究者番号：00015950

研究成果の概要(和文):ホップ代数と量子代数学の大きな応用分野として、準三角ホップ代数、組紐カテゴリーに関係する結び目不変量の研究がある。本プロジェクトでは上記の研究を新しい視点から見直し次のような研究を行った。

(1) Caenepeel, Crivei, Marcus らと共同で、ガロア理論を量子化する立場から、ホップ代数  $H$  を固定して、さまざまな  $H$  余加群代数の間の森田同値の理論 ( $H$  森田理論) を研究し、*Journal of Algebra* 誌上に発表した。

(2) 有限群の代わりに代数群 (つまり可換ホップ代数) を用いたガロア理論としての Picard-Vessiot 理論をさらに発展させて量子群を用いたガロア理論に向けた準備段階として Picard-Vessiot 理論へのホップ代数的アプローチを天野勝利、増岡彰と研究し、*Handbook of Algebra* 誌上に発表した。

(3) 研究代表者 (竹内) が 1977 年に導入し、近年 Boem, Brzezinski 等から注目されている bialgebroid の枠組みで量子代数で重要な役割をはたす FRT (Faddeev, Reshetikhin, Takhtajan) 構成を北大の渋川陽一氏と共同研究し *Journal of Algebra* 誌上に発表した。

研究成果の概要 (英文) : Hopf algebras and quantum algebra theory are applied in the study of quasi-triangular Hopf algebras, braided categories and knot invariants. In this proposal, we have studied the following topics as well as reviewing the above studies from a new viewpoint.

(1) We have studied  $H$  Morita theory, i.e., the theory of Morita equivalences between various  $H$  comodule algebras with a fixed Hopf algebra  $H$  from the viewpoint of quantization of Galois theory, and published a joint paper with Caenepeel, Crivei and Marcus in the *Journal of Algebra*.

(2) We have studied Picard-Vessiot theory, i.e., Galois theory using algebraic groups (or commutative Hopf algebras) instead of usual groups and its generalization towards Galois theory using quantum groups. As its preliminaries we have studied Hopf algebraic approach to the Picard-Vessiot theory and published a joint paper with Katsutoshi Amano and Akira Masuoka in the *Handbook of Algebra*.

(3) The principal investigator (Takeuchi) introduced the concept of bialgebroids in 1977. This concept is recently studied very actively by Boem, Brzezinski and so on. We have studied the FRT (Faddeev, Reshetikhin, Takhtajan) construction which plays an important role in the quantum group theory in the frame work of bialgebroids and published a joint paper with Youichi Shibukawa, Hokkaido University in the *Journal of Algebra*.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,400,000	750,000	4,150,000

研究分野：数学、代数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ホップ代数、量子群、ガロア理論、FRT 構成、bialgebroid, Picard-Vessiot 理論

1. 研究開始当初の背景

量子群は1980年代後半に Drinfeld, 神保らの手により、この世に生み出されて以来、多くの優れた研究者により、表現論、作用素環論、位相不変量、統計物理、そしてホップ代数プロパーを中心とする代数学といった多方面の分野でそれぞれ密接に絡み合いながら、きわめて活発に研究されて来た。特に量子群を有効に使うことによって得られた、代数群に対する Kazhdan-Lustzig 予想の(部分的)解決、量子群に関連して Reshetikhin, Turaev らにより導入されたリボンホップ代数による位相不変量の発見等大きな成果が上がっていた。研究代表者竹内らはここ十数年、量子群、ホップ代数およびそれに関する話題を多面的に研究し成果を挙げてきた。これが本プロジェクト開始当初の状況である。

2. 研究の目的

本プロジェクトは、量子群論の上記のような成功を踏まえ、群論(代数群、リー環を含む)のみならず、数論・代数幾何・環論に渡る代数学全体の量子化へ向けての試みを研究目的とする。以下3項に分けて説明する。

(1) 微分幾何学の量子化は A. Conne の非可換幾何学との関連の下で、S. Majid, Brzezinski, K. Schmudgen らにより研究されているが、この理論では coring やホップ代数を用いたホップ・ガロア理論が重要な役割を演ずる。研究代表者(竹内)は1970年代に森田理論を余代数(coalgebra)に拡張する仕事を行った。これは現在 Van Oysteyen, S. Caenepeel らのグループから森田竹内理論と呼ばれ研究が継承発展している。J. Bichon は最近非退化線形形式の量子群  $B(E)$  の余加群カテゴリーの森田同値についてきわめて興味深い結果を得ているが、この

仕事でも森田竹内理論が本質的な役割を演じている。このように森田竹内理論は非可換幾何学や微分幾何の量子化に重要な役割を果たしているため、量子代数学の立場から森田竹内理論をさらに深く研究する。

(2) ホップ・ガロア理論はそれ自体ガロア理論の量子化ともみなされるが、一方で代数幾何における principal 一様空間の非可換化としての側面を持つ。通常の群の代わりに代数群(つまり可換ホップ代数)を用いたガロア理論として Picard-Vessiot 理論がよく知られている。研究代表者(竹内)は1980年代に E.R. Kolchin のように直接代数群を使わず、ホップ代数的な手法による Picard-Vessiot 理論へのアプローチを開発した。これを微分体からさらに微分環へ拡張し、用いるホップ代数を可換から非可換へ拡張することにより、Picard-Vessiot 理論の量子化をめざしたい。そのための準備的研究を行う。

(3) 研究代表者は1980年代のはじめに群の分解を一般化したホップ代数の matched pair の概念およびそれから引き起こされる新たなホップ代数の構成を考案した。これらは量子群の出現後、S. Majid により取り上げられ、ホップ代数の bicrossproduct (双接合積)として一般化され、ボゾン化(bosonization)の手法とあいまって、今日量子群の基礎概念のひとつになっている。ボゾン化のような対応を考えると、通常の bialgebra やホップ代数だけでなく、研究代表者が1977年に導入し、今日 bialgebroid, Hopf algebroid 等とよばれている拡張された概念が重要である。一方で Faddeev, Reshetikhin, Takhtajan により導入されたいわゆる FRT 構成が量子群論で大きな役割を果たしている。bicrossproduct や bialgebroid と FRT 構成を結びつける試みは

これまで知られていないのでその方向にチャレンジしたい。また関連して、組紐ホップ代数とくに Nichols 代数について未解決の諸問題に取り組みたい。

### 3. 研究の方法

研究の目的欄に対応してそれぞれ述べる。

(1) 微分幾何の量子化は代数幾何の量子化と密接な関連を持つ。それはまた線形代数の量子化を下敷きとしている。一般線形群  $GL(n)$  や特殊線形群  $SL(n)$  の  $q$ -アナログによる線形代数の量子化はよく知られている。さらに Cayley-Hamilton の定理の量子版等も研究されている。この流れで  $q$ -球、 $q$ -monopole、接続の量子化などが S.Majid, K.Schmudgen らにより研究されている。これらを詳しく検討しながら coring やホップ代数を用いたホップ・ガロア理論、森田竹内理論をこれら非可換幾何学の枠組みの中で追求する手法により研究を推進した。

(2) Picard-Vessiot 理論の量子化については Kolchin らが展開した微分体の理論を、任意のホップ代数  $H$  の作用する  $H$ -体や  $H$ -環に拡張するのみならず、coring を用いたホップガロア理論を十分研究する必要がある。それとともに用いる環の種類をうまく制限することも重要である。このような考えに沿ってこの項目の研究を推進した。

(3) FRT 構成や bialgebroid, matched pair, bicrossproduct 等の研究については Majid のグループなどにより盛んに研究されている。それらを文献で調べることも重要であるが、それだけでは本質的に新しい事実の発見は難しい。たとえば Steenrod 代数のような少し代数と違う分野に目を向けることで新たな展望が開けると思われる。実際この分野で N.J.Kuhn は 1971 年に研究代表者が発表した Gabriel-Popescu の定理の証明法を片側森田理論の名で有効に使用して優れた結果を出している。この Kuhn 理論のアイデアをも参考にしてこの項の研究を推進した。

### 4. 研究成果

研究期間中に代表者（竹内）が発表した 3 件の論文について主な研究成果を述べる。

(1) ホップ・ガロア拡大上の双加群 (bimodule) から引き起こされる森田同値 (S. Caenepeel, S. Crivei, A. Marcus との共同研究)

H. J. Schneider が 1990 年にホップ・ガロア拡大の表現論について研究している。それから発展して次の問題を扱っている。  $H$  をホップ代数、  $A$  と  $B$  を右  $H$ -comodule 代数とし、これらは右忠実平坦  $H$ -ガロア拡大とする。また  $A, B$  の  $H$ -不変部分をそれぞれ  $A', B'$  であらわす。①  $A$  と  $B$  が森田同値ならば、  $A'$  と  $B'$

は森田同値か？②逆に  $A'$  と  $B'$  が森田同値のとき、いつ  $A$  と  $B$  が森田同値といえるか？

この問題を研究するために  $H$ -森田コンテキストの概念を導入しその基本性質を詳しく調べた。上記の  $A$  と  $B$  が  $H$ -森田コンテキストで結ばれていれば、  $A'$  と  $B'$  は通常の森田コンテキストで結ばれる。逆に  $A'$  と  $B'$  が森田同値のとき、それらを結ぶ森田データに現れる双加群についてある簡単な条件の下で  $A$  と  $B$  は  $H$ -森田同値になる。これが主結果である。また右  $H$ -comodule 代数に付随して相対ホップ加群のカテゴリーが決まる。  $A$  と  $B$  が  $H$ -森田同値であればそれらの相対ホップ加群のカテゴリーの間の  $H$ -colinear なカテゴリー同値が引き起こされる。  $H$  が射影的であれば逆にそのような任意の  $H$ -colinear なカテゴリー同値は  $A$  と  $B$  の間のある  $H$ -森田コンテキストから引き起こされる。これが第 2 の主結果である。これは Eilenberg-Watts の定理をはるかに一般化したものであり、量子代数への応用に役立つと思われる。

(2) Picard-Vessiot 理論へのホップ代数的アプローチ (天野勝利、増岡彰との共同研究)

Picard-Vessiot 理論は線形微分方程式のガロア理論である。通常の体の拡大の代わりに (定数体を共有する) 微分体の拡大を用いる。ガロア拡大に相当して Picard-Vessiot 拡大が定義される。固定された定数体上の線形代数群がガロア群の役割を演ずる。 E. Kolchin が微分体の拡大によりこの理論を定式化し、Kaplansky が大変読みやすい講義録を著している。そのガロア代数群が可解かどうかによりもとの微分方程式が初等的に解けるかどうか分かる。ただこのアプローチでは、微分体の Picard-Vessiot 拡大に対するガロア代数群が一意的に定義されるかどうかすぐにはわからない。そこで研究代表者 (竹内) は 1989 年に Sweedler による coring の考えを用いた Jacobson-Bourbaki の定理の pre-dual 定理にヒントを得て、まったく新しい、ホップ代数を直接用いる Picard-Vessiot 理論へのアプローチを考案した。この方法によれば Picard-Vessiot 拡大のガロア代数群 (つまりもとの微分体に自然に余作用する可換ホップ代数) の一意性が容易にわかる。また数々の Picard-Vessiot 理論の結果も理論的にわかりやすく導ける。しかも微分体だけでなく余可換ホップ代数の作用する体の拡大に対しても理論が展開できる。一方天野はその後、この竹内式アプローチが M. van der Put, M. F. Singer による線形差分方程式のガロア理論へも応用できることに気づいた。ただしこの場合は、拡大体を拡大環に拡張する必要がある。天野と増岡はこの場合を含むように竹内理論を一般化する仕事を共同で行い、もとの竹内理論とともに Handbook of

Algebra 誌上に 3 人の共著として発表した。我々はこの仕事を、さらに非可換ホップ代数の現れるガロア理論、つまり Picard-Vessiot 理論の量子化へ向けての重要な第一歩と考えている。

(3) dynamical Yang-Baxter 写像に対する FRT 構成 (渋谷陽一との共同研究)

FRT (Faddeev, Reshetikhin, Takhtajan) 構成は Yang-Baxter 方程式の解 (R-行列とも言う) から準三角双代数 (の双対概念) を作り出す 1 つの方法である。(余) 準三角双代数上の (余) 加群全体は組紐カテゴリーをなす。一般に組紐カテゴリーの object 上には Yang-Baxter 方程式 (組紐関係式) をみたす自然な写像がある。FRT 構成はある意味でこの逆のプロセスと言える。ところで北大の渋谷陽一氏は Yang-Baxter 方程式を dynamical system へ拡張する仕事を長らく行い注目すべき結果を多数得ている。ホップ代数で顕著な業績を上げている P. Etingof 達も渋谷と独立に dynamical Yang-Baxter 写像について研究している。渋谷流の dynamical Yang-Baxter 写像とは、集合論的 Yang-Baxter 方程式の拡張で、ある固定した集合  $X$  上にある集合  $H$  の元  $\lambda$  ごとに写像  $R(\lambda)$  を考え、これら写像全体に方程式のシステムを考える。今回研究代表者は渋谷氏との共同研究でこの dynamical Yang-Baxter 写像に対し、最近注目されている bialgebroid (竹内が 1977 年に導入した) の枠組みで FRT 構成のアナログを作る事に成功した。上記のような写像の族  $R(\lambda)$  に対しある  $(H, X)$ -bialgebroid を構成する。この bialgebroid が表現論的にちょうど通常の FRT 構成による双代数と同じふるまいをする。きわめて興味深い事実であると思う。ただ今の段階ではカテゴリーの組紐構造との結びつきはまだ解明されていない。これは今後の課題である。

上記 (1) (2) (3) のほかに研究分担者、連携研究者が次の成果を発表している。

中沢武雄は matroid 理論の創始者として有名である。量子代数学にとっても matroid 理論は種々の可能性を秘めていると思われる。研究分担者西村泰一は黒田進氏との共同研究として、中沢武雄の評伝および業績紹介をドイツの Birkhauser 社から単行本として出版した、そのほか量子代数学と関連する groupoid の synthetic 微分幾何学についてきわめて活発な研究発表を行い本プロジェクト遂行に協力した。

連携研究者内藤聡は量子代数と密接に関連する量子アフィン代数上の Kirillov-Reshetikhin 加群を研究しその成果を出版した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① Y. Shibukawa, M. Takeuchi, FRT construction for dynamical Yang-Baxter maps, Journal of Algebra, 査読有, Vol.323, 2010, 1698-1728,
- ② K. Amano, A. Masuoka, M. Takeuchi, Hopf algebraic approach to Picard-Vessiot theory, Handbook of Algebra, 査読有, Vol.6, 2009, 127-171,
- ③ H. Nishimura, Synthetic vector analysis III. From vector analysis to differential forms, Far East J. Math. Sci. (FJMS), 査読有, 2009, 335-346,
- ④ H. Nishimura, Curvature in synthetic differential geometry of groupoids, Beitrage Algebra Geom., 査読有, Vol.49-2, 2008, 369-381,
- ⑤ S. Caenepeel, S. Crivei, A. Marcus, M. Takeuchi, Morita equivalences induced by bimodules over Hopf-Galois extensions, Journal of Algebra, 査読有, Vol.314, 2007, 267-302,
- ⑥ A. Masuoka, Formal groups and unipotent affine groups in non-categorical symmetry, Journal of Algebra, 査読有, Vol.317, 2007, 226-249,
- ⑦ S. Naito, D. Sagaki, Construction of perfect crystals conjecturally corresponding to Kirillov-Reshetikhin modules over twisted quantum affine algebras, Comm. Math. Phys., 査読有, Vol.263-3, 2006, 749-787.

[学会発表] (計 1 件)

- ① 増岡彰、コサイクル変形としての量子包絡環、日本数学会 2008 年会、平成 20 年 3 月 25 日、近畿大学理工学部

[図書] (計 1 件)

- ① H. Nishimura, S. Kuroda, Birkhauser 社, A lost mathematician, Takeo Nakasawa, 2009, 234 ページ

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹内 光弘 (TAKEUCHI MITSUHIRO)  
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授  
研究者番号: 00015950

(2) 研究分担者

西村 泰一 (NISHIMURA HIROKAZU)  
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・

講師

研究者番号：70135614

(3)連携研究者

内藤 聡 (NAITO SATOSHI)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・  
准教授

研究者番号：60252160

増岡 彰 (MASUOKA AKIRA)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・  
准教授

研究者番号：50229366