様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　４月１５日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2006～2009
課題番号：１８５４００１０
研究課題名（和文）　簡約可能概均質ベクトル空間の分類とその応用

研究課題名（英文）　A classification of reductive prehomogeneous vector spaces and its application

研究代表者
木村　達雄（KIMURA TATSUO）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：３００２２７２６

研究成果の概要（和文）：ある条件下の概均質ベクトル空間の分類を行いその応用として既約弱球等質空間の分類を完成させた。またＩ型２単純概均質ベクトル空間の相対不変式で存在はわかるが具体的な形が不明なのが多かったが、それらをすべて明らかにした。次に大島利雄氏の研究による超幾何関数が生み出される概均質ベクトル空間をスカラー倍が制限される場合も含めて分類を完成させた。さらに佐藤幹夫氏による簡約可能概均質ベクトル空間の研究を、その方法でかなり進展させた。

研究成果の概要（英文）：We classified some prehomogeneous vector spaces (abbrev. PV) and as its application, we completed the classification of irreducible weakly spherical homogeneous spaces. The form of some of relative invariants of 2-simple PVs of type I were not known and we gave them explicitly. Then we classified some finite PVs including various scalar multiplications from which hypergeometric functions arise. We also develop the results of classification of reductive PVs by M. Sato.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００６年度 | 900,000 | 0 | 900,000 |
| ２００７年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| ２００８年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| ２００９年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 3,400,000 | 750,000 | 4,150,000 |

研究分野：概均質ベクトル空間
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数一般、概均質ベクトル空間

１．研究開始当初の背景
１９６０年代にプリンストン高等学術研究所に滞在中の佐藤幹夫氏によって概均質ベクトル空間の基本定理が証明され、その応用として超関数としての概均質ベクトル空間のゼータ関数が関数等式を満たすことが示された。
それと同時に佐藤幹夫氏は同じくプリンストン高等学術研究所に滞在中の岩堀長慶氏にリー環や表現論について必要なことを教わりながら既約概均質ベクトル空間の分類の研究を始めた。

その後佐藤幹夫氏はあるとき井草準一ジョンス・ホプキンス大学教授に「既約概均質ベクトル空間は余りにも多くてどうやって分類して良いかわからない」と語ったという。余りに多くてどう制御して良いかわからないということは現在でも一般の簡約可能概均質ベクトル空間の分類をやろうとするとすぐに感じられることである。
しかしその後佐藤幹夫氏はグラスマン構成を発見し、与えられた概均質ベクトル空間から無限に新しい概均質ベクトル空間を得ることに成功した。それは現在裏返し変換とよばれている。ちなみにこの英訳の castling transformation はチェスに詳しかった新谷卓郎氏による。
この発見により既約の場合の概均質ベクトル空間の分類が可能になった。
裏返し変換を施すと必ず次元があがる概均質ベクトル空間を被約(reduced)とよぶ。任意の既約概均質ベクトル空間に対して次元を下げる裏返し変換はもし存在すれば唯一つであることが証明される。もともと空間は有限次元なので、裏返し変換を有限回繰り返して次元を下げていけば必ず被約な概均質ベクトル空間に達する。
そこで既約概均質ベクトル空間の分類とは被約な概均質ベクトル空間のリストを作るということと、任意の既約概均質ベクトル空間は有限回の裏返し変換で被約概均質ベクトル空間に移るという二本立てである。
１９６９年に佐藤幹夫氏は東京大学で「既約概均質ベクトル空間の分類」という題で１週間の集中講義を行った。このときはまだ分類は完成していなかったが、すでに有限個の被約な三つ組を決定していた。その中で概均質ベクトル空間かそうでないかが未決定のものが１１個あり、その表が講義中に配られた。それを見た木村達雄はそれを解決しようと決意する。そして修士１年が終わった春休みに京都大学数理解析研究所に佐藤幹夫教授を訪ね、３０分個人的に説明を受けてその滞在中にスピン表現が関係する三つ組の概均質性の判定を完成した。そこで３ヶ月後にまた来るようにと言われた木村は、３ヶ月後の滞在中に例外型単純代数群が関係する三つ組の概均質性の判定が完成して、既約概均質ベクトル空間の分類が完成した。これは１９７２年である。
単純代数群の既約概均質ベクトル空間の分類を完成したのは新谷卓郎氏であったので佐藤幹夫教授は、佐藤―新谷―木村で既約概均質ベクトル空間の分類の論文を書くように言われたが、新谷氏は自分の結果は佐藤―新谷の Annals の論文に既に発表しているからと固辞したので、結局佐藤―木村で既約概均質ベクトル空間の分類の論文が書かれたが、１５５頁に及ぶもので５年後の１９７７年に Nagoya math. J. から出された。
その後木村達雄により既約でない場合の、しかし各既約成分にスカラー倍が独立に作用するという条件で単純代数群の概均質ベクトル空間の分類を完成した。
既約概均質ベクトル空間の分類が完成したあと木村は色々な空間の軌道分解をしていく過程で、既約概均質ベクトル空間で有限個の軌道をもつものを分類した。その内容は佐藤―木村の論文に書かれている。
その後 V. Kac はクイバーの理論から有限個の軌道を持つクイバーをすべて決定した。
それに刺激を受けて木村は当時の大学院生だった笠井伸一と保倉理美とともに、各既約成分にスカラー倍が独立に作用するという条件のもとに一般の既約とは限らない有限個の軌道を持つ簡約可能概均質ベクトル空間の分類を完成した。この結果は American J. Math.から出版された。
次に取り組んだのは２単純概均質ベクトル空間の分類である。
一般に任意の代数群 H とその任意の表現 $\rho$ があるとき、$\rho$ の次数より大きな任意の自然数 n に対して, H×GL(n)のテンソル表現 $\rho\otimes\Lambda_1$ を考えるとこれは常に概均質ベクトル空間になる。既約の場合はこれは余り面白くない概均質ベクトル空間で佐藤幹夫氏はこれを自明な概均質ベクトル空間と名付けた。
しかし既約でない概均質ベクトル空間の分類においては、この自明な概均質ベクトル空間が関係してくると全く異なるレベルの難しさになる。
２単純代数群の分類において自明な概均質ベクトル空間が関係しないものをⅠ型というが、この場合の分類は比較的やさしく完成することが出来た。
しかし自明な概均質ベクトル空間が関係するⅡ型の場合は本質的な難しさがあり、完成するまでに４年もかかってしまった。
その突破口となったのは当時の大学院生であった犬塚昌明氏による一般的な生成的等方部分群の計算であり、それによってやっと完成することが出来た。
内容もⅠ型とⅡ型では全く異なっている印象を受ける。
その後、木村―吉垣―上田により３単純の非自明型の概均質ベクトル空間の分類は完成した。
しかしこの場合でも色々新しいアイデアが必要で、新しい概均質同値性を導入して初めて完成することが出来た。
裏返し変換や佐藤―森変換だけでは不十分で、最初は等方部分群を直接計算するという力技で挑戦したが、その結果の行列を書いた紙が研究室全体に敷き詰められるほどの量になり、それを見て解決するのは不可能だと悟り、全く別の方法を考えついたのである。

しかし自明な概均質ベクトル空間が関係する３単純概均質ベクトル空間の分類はまだ手がつけられない状態である。
木村の大学院生だった林幸昌氏はその概均質性を判定するコンピューターのソフトを修士論文で開発したが、２とか３くらいの小さな数ならともかく大きな数字を入れると計算に時間がかかりすぎて実用に適するとはいえない。
既約成分が２個の場合の概均質ベクトル空間の分類は笠井伸一氏により始められたが、やはり自明な概均質ベクトル空間が深く関係する部分は極めて難しくてそこは未完成のまま残されている。
それ以外の２既約成分の場合の分類は完成された。その応用として既約成分がすべて正則概均質ベクトル空間の場合と、非自明な概均質ベクトル空間である場合の分類を笠井氏は完成している。
またクイバーで概均質ベクトル空間になるかどうかの必要十分条件を V. Kac はカッツ・ムーディリー環のルート系を用いて記述し、それに基づいてクイバーの次元ベクトルを入れれば直ちに概均質性を判定出来るコンピューター・ソフトも得られている。
また H. Rubenthaler は有限次元半単純リー環の grading から得られる Vinberg の概均質ベクトル空間をルート系を使って詳しく研究し、放物型概均質ベクトル空間と名付けている。以上が研究開始当初の背景である。

２．研究の目的
最終目的は各既約成分に独立なスカラー倍が働く場合のすべての簡約可能概均質ベクトル空間の分類であるが、あまりにも難しいので、応用面を考えて少しでも分類を進める.
佐藤文広氏によって得られた弱球等質空間は概均質ベクトル空間や対称空間の両方を含む概念で、いわば概均質ベクトル空間の一般化であるが、実際に概均質ベクトル空間自身の研究にも弱球等質空間の概念が色々応用出来ることが知られているので、その分類は重要である。しかし単純代数群の弱球等質空間の分類しか出来ていないので、既約弱球等質空間の分類をすることを最初の目標にする。これは結局ある種の概均質ベクトル空間の分類に帰着するのである。
これを遂行する段階で（$H\times GL(n)$, $\rho\otimes\Lambda_1$, $V(m)\otimes V(n)$）が m>n>0 のとき概均質ベクトル空間ならば, n=1 でも概均質ベクトル空間か？という問題がある程度解決された。これは既約概均質ベクトル空間の場合は正しいが既約でないと反例があるということである。
また概均質ベクトル空間の応用で大事になるのは相対不変式であるが、時としてその具体的な記述が重要になる場合がある。単純概均質ベクトル空間の相対不変式についてはその具体的な構成法は完全に知られていたが２単純概均質ベクトル空間の相対不変式の具体的な構成法は一部を除いてわかっていなかったので、それを解決することは重要な目標のひとつであった。
また概均質ベクトル空間から超幾何関数を構成する研究をしている大島利雄東京大学教授から、有限個の軌道を持つ（$H\times GL(n)$, $\rho\otimes\Lambda_1$, $V(m)\otimes V(n)$）ただし n は２と m-2 の間にある自然数、という形の概均質ベクトル空間が超幾何関数の研究に対して重要なのでその分類を知りたいとの要請があった。各既約成分にスカラー倍が独立に作用している場合の分類は木村―笠井―保倉により分類されているが、スカラー倍を制限しても有限個の軌道を持つかどうかはなかなか複雑な問題である。その種の問題が解決しているのはＡ型のクイバーだけであるが、応用上重要なのでその分類も目標とする。
概均質ベクトル空間の理論が出来た頃に佐藤幹夫氏は未発表ではあるが、ある種の簡約可能概均質ベクトル空間の分類を手がけている。それは($H\times G$, $\Lambda_1\otimes\rho$, $V(n)\otimes V(d)$)の形で H は SL(n)の半単純部分代数群, G は簡約可能代数群で V(d)の各既約成分は G のある単純成分の既約表現のテンソル積になることは一般的に知られた事実であるが、単純成分の最大の既約表現の次数をδとおく。
またこのδが現れる G の既約成分に現れる半単純部分の個数を k とおく。佐藤幹夫氏は n がδと d-δの間にある場合の分類を試みている。これは一見特殊な形に見えるが実はすべての簡約可能概均質ベクトル空間は、この形の空間と概均質同値であることが証明されるので、これは一般の簡約可能概均質ベクトル空間の分類は不可能と V.Kav や D.Luna が主張している現段階である程度の結果が期待される分類の方法であると言える。佐藤幹夫氏は n がこの範囲にあるとき k は 0,1,2 のいずれかであることを証明し, 更に k=2 の場合を完全に分類した。k=0 の場合は分類はすぐ出来るので k=1 の場合が問題である。k=1 の場合はδが現れるＧの既約成分は単純代数群の既約表現だということであるから、まず例外型単純代数群の場合の分類を完成させるのが目標である。古典型の場合はかなり難しいことが予想されるので極端な場合、すなわち n=δと n=d-δの場合を考える。しかしこの場合ですら、単純代数群が SL(δ)の場合は, すべての簡約可能概均質ベクトル空間を含むので、この場合をはずさないと現段階では不可能である。これらを除外した上で佐藤幹夫氏による研究の未解決部分を完成させることを目標にする。

３．研究の方法

基本的には佐藤・木村による既約概均質ベクトル空間の分類で使われた方法によるが、V.Kac の quiver の PV 性の証明や Rubenthaler のやり方も取り入れる.
とりあえず裏返し変換、佐藤―森変換、直和、自明な概均質ベクトル空間による接着、などの概均質同値性が知られており、たとえば既約概均質ベクトル空間の分類が完成したのは佐藤幹夫氏による裏返し変換という概均質同値性の発見が本質的であった。一般の場合の分類を遂行するのは現在知られている概均質同値性だけでは不十分と思われるので、新しい概均質同値性の発見をすることは極めて重要である。また森重文氏がある空間の概均質性がグラスマン多様体が関係したある種の多様体の概均質性の同値を証明しているが、それをわけのわからない多様体ではなくベクトル空間の概均質同値性で表現することを考えるのが当面の具体的な目標である。

４．研究成果

研究の目的や研究の方法に書いたことは大目標の完全な分類をするということは除いてすべて成果をあげることが出来た。
今回の分類の応用として、既約弱球等質空間の分類の完成、超幾何関数が関係する概均質ベクトル空間のスカラー倍まで含めた分離御の完成、Ｉ型２単純概均質ベクトル空間の相対不変式の構造を明らかにしたこと，佐藤幹夫氏による分類の結果をさらに進展させたことなど。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① <u>T. Kimura</u>, Y. Ishii, I. Ryu, M. Hamada, Y. Kurosawa, M. Ouchi, and T. Kamiyoshi; On M. Sato’s classification of some reductive prehomogeneous vector spaces, Publ.of R.I.M.S., 査読有, (2011) to appear
② <u>T. Kimura</u>, T. Kamiyoshi, N. Maki, M. Ouchi and M. Takano; A classification of representations $\rho\otimes\Lambda_1$ of reductive algebraic group $G\times SL(n)$ with finitely many orbits, AGG, 査読有, vol25 (2008) 115-159
③ <u>T. Kimura</u>, T. Kogiso and K. Sugiyama; Relative invariants of 2-simple prehomogeneous vector spaces of type I, J. Algebra, 査読有, vol.308 (2007) 445-483
④ <u>T. Kimura</u>, D. Takeda, T. Kamiyoshi; A classification of irreducible weakly spherical homogeneous spaces, J. Algebra, 査読有, vol.302 (2006) 793-816

〔学会発表〕（計３件）

① <u>木村達雄</u>: 佐藤幹夫先生による簡約可能概均質ベクトル空間の分類とその後の発展,「簡約可能概均質ベクトル空間の分類とその応用」研究集会, 2009.11.22 つくば国際会議場　小会議室４０１
② <u>木村達雄</u>: 笠井―黒澤による研究の補足,「簡約可能概均質ベクトル空間の分類とその応用」研究集会, 2009.11.21 つくば国際会議場　小会議室４０１
③ <u>木村達雄</u>: 簡約可能概均質ベクトル空間の分類の現状, 「簡約可能概均質ベクトル空間の分類理論」研究集会, 2008.11.29 つくば国際会議場　小会議室４０３

〔図書〕（計２件）

① <u>木村達雄</u>、竹内光弘、宮本雅彦、森田　純著:代数の魅力、数学書房、２００９年、175-201
② <u>木村達雄</u>編：佐藤幹夫の数学、日本評論社、２００７年、376 ページ

６．研究組織

(1)研究代表者

木村　達雄（KIMURA TATSUO）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：３００２２７２６