様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年５月１８日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2006 ～ 2008
課題番号：18540012
研究課題名（和文）線形関数方程式系を満たす解析関数の数論的性質についての研究

研究課題名（英文）Research of arithmetical properties for analytic functions satisfying a system of linear functional equations

研究代表者
天羽　雅昭（AMOU MASAAKI）
群馬大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：60201901

研究成果の概要：K. Väänänen 教授（オウル大学）との共同研究により、Mahler 型線形関数方程式の鎖を満たす解析関数の特殊値について種々の結果を得た。、特に、無限積で表される関数の場合に、それらの関数全体が乗法群を作ることを利用して、特殊値の代数的独立性を証明することに成功した。また、Y. Bugeaud 教授（ストラスブール大学）との共同研究により、整数係数多項式の解の分離性について調べ、その応用として、ほとんどすべての数が満たす超越測度の上界を改良した。

交付額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| 2006 年度 | 1,200,000 | 0 | 1,200,000 |
| 2007 年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 2008 年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 3,400,000 | 660,000 | 4,060,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：q－関数、G－関数、パデ近似、１次独立性、超越測度

１．研究開始当初の背景
研究代表者は、平成１１年度以降科学研究費の補助を受けて、線形 q-差分方程式系を満たす解析関数（以下、q-関数、と略記）の特殊値について一連の研究を行ってきた。これらの研究は、線形微分方程式系を満たす解析関数の特殊値に関する Siegel-Shidlovskii の E-関数理論に対応する理論を、q-関数に対して展開することを動機としているが、その進展とともに G-関数との強い類似性が見出され、さらに Mahler 関数理論とも係わりがあることが認識された。こうして、E-関数理論をモデルにした q-関数の研究が、種々の線形関数方程式系を満たす解析関数を研究する統一的方法を示唆するに至った。こうした研究成果を踏まえて、当該研究では、種々の線形関数方程式系を満たす解析関数の数論的性質を、パデ近似（第１種および第２種）の方法を発展させることで究明することを目指すことになった。

２．研究の目的
（１）パデ近似と Shidlovskii 型補題

E-関数理論において、Shidlovskii の補題と呼ばれている結果は、対象とする関数の第１種パデ近似に関係している。これに対して、D.V. & G.V. Chudnovsky 両氏は G-関数理論の研究において、Shidlovskii の補題の双対と見なせる結果を第２種パデ近似について証明し、この分野に重要な貢献をした。これらの研究を踏まえて、研究代表者は K. Väänänen 氏（海外共同研究者）との共同研究を経て、T. Matala-aho 氏（海外共同研究者）を加えた共同研究により、Shidlovskii の補題およびその双対の q-関数における類似を完全な形で確立した（)。また、この結果は、q-差分の作用を、対象とする関数体の自己同型と捉える一般的視点に立って証明されているため、その適用範囲は当初の q-差分方程式系の枠を越え、線形 Mahler 型関数方程式系に対しても(双対に対して)成り立つことが分かった。一方、A.I. Galochkin 氏は、以上の成果が得られる以前に、Shidlovskii の補題の双対に関する新しい方法を提示した。その特徴は、対象とする関数には１次独立性のみを仮定する代わりに、得られる結果が定性的で弱い形になることである。当該研究では、線形関数方程式系あるいはその鎖を満たす解析関数を主な対象として、Galochkin 氏の方法を定量性を保った形で展開を探り、Shidlovskii 型補題の双対と呼ぶべき結果の定式化を目指す。これは、広いクラスの関数に対して、その特殊値のディオファンタス近似論への道を拓くものである。

（２）q-関数の特殊値への応用

T. Matala-aho 氏（海外共同研究者）は、多項式係数の高階線形 q-差分方程式の解となる q-関数の特殊値についての研究を創始した。同氏の方法は、q-差分方程式の反復適用のみに基づくもので、大変広いクラスの関数を扱える一方、得られた結果は、特殊値の内の少なくとも２つが１次独立になることを主張する弱いものであった。この研究は、その後、研究代表者と Matala-aho 氏との共同研究によって、Thue-Siegel の補題を使ったパデ近似の構成と q-差分方程式の反復適用を組み合わせた方法に発展し、まず、差分方程式の階数が２の場合に定量的な改良がなされ、続いて、階数が３以上の特殊なクラスの関数の場合に定性的な改良がなされた。当該研究では、（１）で述べた研究成果（およびその発展）を道具にこれらの課題に取り組み、q-関数の１次独立性についての一般的な結果の確立を目指す。

（３）Mahler 関数の特殊値への応用

D. Duverney と西岡久美子の両氏は、Duverney 氏によって創始された帰納的方法と Mahler 関数理論を結び付け、ある種の関数の特殊値の超越性を示した。この結果は、対象とする関数および証明方法の両面において大変興味深い成果であるが、最終的に Loxton & van der Poorten の定理（定性的）に帰着させるため、超越測度についての情報を含まない。当該研究では、Loxton & van der Porten の定理に代わる枠組みを、（１）で述べた Galochkin 氏の方法の適切な定量化に求め、上記の結果の定量的な精密化に取り組む。

（４）G-関数理論への応用

G-関数と G-作用素の同値性は、G-関数理論における基本定理である。研究代表者は、この定理の証明のアイデアに強く影響された一方で、証明の過程に不透明さがあるようにも感じた。その理由を探っている内に、微分の作用に重点が置かれすぎ、関数そのものが持つ情報を十分に生かしきれていないのではないか、と考えるに至った。当該研究では、この観点を追求し、G-関数理論の簡易化に取り組むとともに、定理の定量的な意味での改良を目指す。

３．研究の方法

（１）パデ近似と Shidlovskii 型補題

これまでに得られている Shidlovskii の補題およびその双対では、単独の線形関数方程式系を満たす解析関数が対象になっているが、これを線形関数方程式系の鎖を満たす解析関数に拡張することができると、興味深い応用への道が拓ける。そこで、線形関数方程式系の鎖を満たす解析関数を主な対象にして、Shidlovskii の型補題およびその双対を確立することを目指す。その第一のモデルとなる Galochkin 氏の論文（Vestnik Moskov Univ. Mat. Meck., 1997）では、有理関数体上１次独立なベキ級数が与えられたとき、それらの第２種パデ近似の１次独立な組を構成できることが示されている。この結果は、関数に１次独立性のみを仮定することより定性的である。そこで、この仮定を定量的な１次独立性に置き換えることで、第２種パデ近似の構成を定量的に精密化する可能性について検討する。さらに、有限な１次独立度を持つ関数のできるだけ広いクラスを具体的に求めるために、Duverney と西岡両氏の論文（Acta Arith. 110, 2003）をモデルにした研究を行う。

（２）q-関数の特殊値への応用

T. Matala-aho 氏と行ってきた研究を継続し、多項式係数の高階 q-差分方程式を満たす解析関数の特殊値の１次独立性を考察する。そのために、補助関数の厚生を含めて従来の方法を根本的に見直し、対象とする関数の第１種パデ近似について詳しく調べる。

（３）Mahler 型関数の特殊値への応用

上記計画で述べた研究の進展を受けて、線形

Mahler 型関数方程式の鎖を満たす解析関数の特殊値の超越性に関する Duverney & 西岡の定理を、定量的に改良することを目指す。通常、単独の Mahler 型関数方程式を満たす解析関数の特殊値の超越性を示す場合、証明の過程において、関数方程式を反復適用する回数に融通が効くことが大切な役割を演じる。しかし、関数方程式の鎖を満たす関数の場合、関数方程式（の鎖）を反復適用する回数は自動的に決定されてしまい、このことが、そのまま証明における制限につながる。この制限からくる困難を抱えて定量的な結果を示すために、Shidlovskii 型補題の双対で得られる行列式に対して、その特殊値が零にならない条件を探る。

（４）G-関数理論への応用
G-関数と G-作用素の同値性を主張する G-関数理論の基本定理の証明を見直し、その簡易化を行うとともに、定理の定量的な改良を目指す。具体的な方針として、与えられたベキ級数の係数と、その高階導関数の係数の間に成り立つ単純な関係を最大限に活用するアイデアを追及する。

４．研究成果

（１）K. Väänänen 氏（オウル大学）と関数方程式の鎖を満たす Mahler 型関数の特殊値についての研究を行い、次に述べる成果を得た。

① Duverney、西岡両氏による無限級数で表される関数についての結果（Acta Arith. 110, 2003）を定量化するための新しい方法を開発した。これは、平成 17 年度科学研究費補助金（No. 5540006）による補助を受けて開始した研究の継続であり、Galochkin 氏の判定法（Moscow Univ. Math. Bull. 52, 1997）を用いる当初の方法の弱点（整数分の一での値しか扱えない）を克服し、一般の代数的数での特殊値を扱うことを可能にするものである。

② Duverney、西岡両氏による無限和で表される関数についての結果、および立谷氏による無限積で表される関数についての結果（J. Number Theory 125）は、その証明において、関数についての議論と関数値についての議論が分離されていない。すなわち、関数値の性質を仮定して関数の性質を導く、といった議論がなされている。当該研究では、これらの議論を詳しく解析し、その結果、関数についての種々の性質は、関数値についての仮定なしに純代数的に導けることを見出した。これにより「当該関数の超越性は、その非有理性から従う」という基本定理が、数論的な条件とは無関係に成り立つことが判明した。また、当該関数の非有理性を判定する有用な十分条件、および当該関数が有限な非有理度をもつための有用な十分条件を得た。
その応用として、無限積で表された関数について、有限な非有理度を持つ具体例が初めて構成された。

③ 無限積で表される関数全体が乗法群を作るという著しい性質に注目することにより、関数およびその特殊値の代数的独立性について、いくつかの新しい結果を得た。まず、関数については「複数の無限積関数が有理関数体上代数的独立になる必要十分条件は、それらが有理関数体を法にして乗法独立となることである」という結果と、その定量的な精密化を証明した。さらに、後者における方法に数論に関わるデリケートな議論を加味することで「複数の無限積関数について、それらのモノミアル（負のベキも許す）がすべて有限な非有理度をもつなら、それらの整数分の一での特殊値は代数的独立である」という結果を証明することに成功した。これは、当該関数の特殊値の代数的独立性について得られた最初の結果として重要である。その証明は、上述した超越測度についての結果を出発点にして、Duverney 氏が導入した帰納的方法の最初の形（Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 130, 2001）を応用する、というものである。

（２）Y. Bugeaud 氏（ストラスブール大学）との共同研究により、整数係数多項式の解の分離性について、以前に得られていた結果を改良した（Mathematika, 54, 2007）。そのために、判別式を使う従来の方法を対称化する、という新しい方法を開発した。さらに、同様な方法を使って、与えられた数と多項式の解との距離について、有用な評価を得た。その応用により、ほとんどすべての数が満たす超越測度について、大変良い上界を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計２件）


① M.Amou, T. Matala-ach, K. Väänänen, On Siegel－Shidlovskii's theory for q－difference equations, Acta Arith., 127, 309-335, 2007, 査読有
② M.Amou, Yann Bugeaud、On integer polynomials with multiple roots, Mathematika, 54, 83-92, 2007, 査読有


〔学会発表〕（計２件）


① 天羽雅昭、Algebraic independence of certain infinite products, Diophantine Analysis and Related Fields 2009, 2009.3.3, 東京
② 天羽雅昭、Linear independence of the values of q-series,

Numbers, Functions, Equations 08、
2008.6.19, Noszvaj (ハンガリー)

〔その他〕
ホームページ
http://www.tech.gunma-u.ac.jp/gakka/Kyotsu.htm

６．研究組織
(1)研究代表者

天羽　雅昭 (AMOU MASAAKI)
群馬大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：60201901

(2)研究分担者

齋藤　三郎 (SAITO SABURO)
群馬大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：10110397
(期間：平成 18 年度～平成 19 年度)

天野　一男 (AMANO KAZUO)
群馬大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：90137795
(期間：平成 18 年度～平成 19 年度)

桂田　昌紀 (KATSURADA MASANORI)
慶応義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：90224485
(期間：平成 18 年度～平成 19 年度)

(3)連携研究者

齋藤　三郎 (SAITO SABURO)
群馬大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：10110397
(期間：平成 20 年度)

天野　一男 (AMANO KAZUO)
群馬大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：90137795
(期間：平成 20 年度)

桂田　昌紀 (KATSURADA MASANORI)
慶応義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：90224485
(期間：平成 20 年度)