

平成 21 年 6 月 3 日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540016

研究課題名（和文）複素解析曲面論と超ケーラー多様体

研究課題名（英文）Complex analytic surfaces and hyperkaeher manifolds

研究代表者

小木曾 啓示 (OGUIISO KEIJI)

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号:40224133

研究成果の概要：

研究成果の概要：複素解析曲面と超ケーラー多様体に見られる著しい類似性に着目することにより、ケーラー多様体の双有理型変換群の粗分類定理(Tits 型定理)を確立した。また、分類に現れる非可換自由群および最大階数のアーベル群のラグランジアンファイブレーションを用いた構成法を確立した。また、自己同型の複素力学的意味、ラグランジアンファイブレーションの一般特異ファイバーの分類、超ケーラー多様体の代数次元、特に 4 次元の場合の完全な記述を与えた。以上の研究に加えて、滑らかな小変形を有せず、互いに双有理であるが射影平坦変形でつながりしかも同相ではない 3 次元多様体カラビ・ヤウ多様体の存在を発見した。以上の研究が評価され日本数学会代数学賞を受賞した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,400,000	0	1,400,000
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	420,000	3,220,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：超ケーラー多様体 双有理変換群 モデル・ヴェイユ群  
ラグランジアンファイバー空間 カラビ・ヤウ多様体

## 1. 研究開始当初の背景

複素解析曲面と超ケーラー多様体に見られる著しい類似性が見られることに着目し、分類理論において重要な役割をもつもの。まだまだ未開である超ケーラー多様体の構造を明らかにしたいという動機に基づきこの研究を始めた。また、その時期に McMullen 氏により存在が示された非射影的 K 3 曲面

の驚くべき自己同型の存在に触発されて、まずは双有理型自己同型群の構造を非射影的な場合も含めて明らかにしたいというより具体的な目標もあった。

## 2. 研究の目的

(1)超ケーラー多様体の双有理型変換群の構

造を非射影的な場合も含め明らかにすること

(2)特に階数の大きなアーベル群の自己同型としての実現、非可換自由群の自己同型としての実現。そのための道具となる高次元アーベリアンファイバー空間のモデル・ヴェイユ群の階数公式の確立。

(3)楕円曲面の特異ファイバーの分類に示唆されたラグランジアンファイバー空間の一般特異ファイバーの分類とその明示的記述。

(4)非射影的超ケーラー多様体に付随する最も基本的な普遍量である代数次元と代数還元写像の構造を明らかにすること。

### 3. 研究の方法

(1),(2)については個人研究で行い、結果は随時研究集会等で公表し、最終的な結果は学術論文の形にまとめ公表した。当該期間中の成果はすべて査読付きの専門誌に掲載決定済みである。

(3)については同様の興味を持ちより複素幾何学的な素養をもった Hwang 氏との共同研究の形で進め、結果は随時研究集会や講義を通じて公表した。最終的な結果は共著論文にまとめ、査読付き専門誌に掲載が決まった(2009年4月)

(4)については Campana 氏、Peternell 氏との共同研究の形で進め、やはり随時研究集会等で結果を公表した。特に4次元の場合には十分に満足いく結果が得られたため、一般論とあわせて論文の形にまとめ現在投稿中である。

### 4. 研究成果

(1) 極小モデル理論から見て自然な条件のもとで abelian fibration の Mordell-Weil 群の有限生成性とその階数公式を確立した。

(2) 超ケーラー多様体に付随する Abelian fibration の一般ファイバーの Picard 数は 1 であることを示し、(1)とあわせて Mordell-Weil 群の変形における挙動及び現存する超ケーラー多様体に付随する Abelian fibration の Mordell-Weil 群の階数の最大値が 20 であることを示した。

(3)超ケーラー多様体の双有理型変換群に対する Tits 型定理を確立し、特にそれが非可換自由群を部分群にもつための幾何学的十分条件を与えた。また、複素力学系に現れるエントロピーの超ケーラー多様体の双有理型変換群の分類における群論的役割を明らか

にした。これら一連の研究とそのもとになった McMullen 氏の仕事については、雑誌数学においても解説した(論文(6))。

(4) Jun-Mok Hwang 氏と共同で Lagrangian fibration に現れる一般特異 fiber を symplectic 構造と discriminat divisor から自然にできる foliation の積分曲線の言葉で分類し、その積分曲線の形状が2つの(無限型の)例外を除き極小楕円曲面における小平 fiber の分類と一致することを示した。(J. Amer.Math.からの出版が2009年4月に決まった。)

(5) Campana 氏, Peternell 氏と共同で超ケーラー多様体の代数次元と代数還元写像について研究し、最初の非自明な場合である 4次元の場合に完全解決した。結果として代数次元は0, 2, 4のいずれかであり2の場合には代数還元写像は正則 Lagrangian fibration になる。この結果は現在投稿中である。

(6)Nam-Hoon Lee 氏と共同で rigid で互いに双有理であるが射影平坦変形でつながりしかも同相ではない 3次元 Calabi-Yau 多様体の存在を発見した。この結果は個人的には非常に気に入っているものであり、代数学賞受賞記念講演の講演題目に選び講演した。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

(1) Keiji Oguiso: A remark on dynamical degrees of automorphisms of hyperkaehler manifold, to appear in Manuscripta Math. (accepted on March 2009)査読有

(2) Keiji Oguiso: Picard number of the generic fiber of an abelian fibered hyperkaehler manifold", to appear in Math. Annalen (accepted on December 2008)査読有

(3) Nam-Hoon Lee, Keiji Oguiso: Connecting certain rigid birational non-homeomorphic Calabi-Yau threefolds via Hilbert scheme, to appear in Comm. Analysis and Geometry (accepted on December 2008), 査読有

(4) JongHae Keum, Keiji Oguiso, De-Qi Zhang: Conjecture of Tits type for complex varieties and Theorem of Lie-Kolchin type

for a cone", to appear in Math. Research Letters (accepted on March 2008) 査読有

(5) K. Oguiso: Mordell-Weil groups of a hyperkähler manifold - a question of F. Campana", Publ. RIMS (44) (2008) 495--506 (special issue for Professor Heisuke Hironaka's 77-th birthday). 査読有

(6) K. Oguiso: Bimeromorphic automorphism groups of non-projective hyperkähler manifolds - a note inspired by C. T. McMullen, J. Differential Geometry 78 (2008) 163-191. 査読有

(7) K. Oguiso: Shioda-Tate formula for an abelian fibered variety and applications", to appear in Korean J. Math. (accepted on October 2007) 査読有

(8) 小木曾啓示: Salem 多項式と超ケーラー多様体の双有理型変換群, 数学 59 巻 (2007) 1-23. 査読有

(9) K. Oguiso: Groups of automorphisms of null-entropy of hyperkähler manifolds, Contemp. Math. 422 (2007) 173--185. 査読有

(10) K. Oguiso: Tits alternative in hyperkähler manifolds, Math. Research Letters, 13 (2006) 307-316. 査読有

[学会発表](計 14 件) 以下すべて小木曾啓示による単独発表

(1) Keiji Oguiso, 日本数学会 2009 年度代数学賞受賞講演  
Connecting certain rigid birational non-homeomorphic Calabi-Yau threefolds via Hilbert scheme, 東京大学 2009 年 3 月 28 日

(2) Keiji Oguiso, Enriques manifolds, Arithmetic and Algebraic Geometry Related to Moduli Spaces, 東京大学 2009 年 1 月 22 日

(3) Keiji Oguiso, Non-algebraic hyperkähler manifold, 平成 20 年度多変数関数論冬セミナー, 熊本大学, 2008 年 12 月 26 日

(4) Keiji Oguiso, Mordell-Weil groups of abelian fibered hyperkähler manifolds and O'Grady's 10-dimensional examples, Coe-Cow in Tokyo, 東京大学, 2008 年 12 月

18 日

(5) Keiji Oguiso, Fano manifolds and Lagrangian fibration of symplectic manifolds", 31st Autumn School in Algebraic Geometry, Lukecin, Poland, 2008 年 8 月 31 日-9 月 6 日 (seven 90 minute lectures).

(6) Keiji Oguiso, Non-algebraic hyperkähler manifolds, Komplexe Analysis, Oberwolfach, Germany, 2008 年 8 月 29 日.

(7) Keiji Oguiso, Algebraic reductions of hyperkähler manifolds, 第 53 回代数学シンポジウム, 盛岡市, 2008 年 8 月 6 日

(8) Keiji Oguiso, Connecting certain rigid birational non-homeomorphic Calabi-Yau threefolds via Hilbert scheme, Fourth Pacific Rim Conference on Mathematics, Hong-Kong, 2007 年 12 月 8 日

(9) Keiji Oguiso, On non-algebraic hyperkähler manifolds", Complex Geometry in Osaka, 2007 年 11 月 4 日

(10) Keiji Oguiso, Mordell-Weil group of an abelian fibered variety and its application to hyperkähler manifolds, Algebraic Geometry Symposium, 城崎, 2007 年 10 月 23 日

(11) Keiji Oguiso, Mordell-Weil group of an abelian fibered variety and its application to hyperkähler manifolds, Komplexe Algebraische Geometrie, Oberwolfach, Germany, 2007 年 10 月 1 日

(12) Keiji Oguiso, General singular fibers of holomorphic Lagrangian fibration - a joint work with Jun-Muk Hwang, Pacific Rim Complex Geometry Conference, Kobe, Japan, 2007 年 8 月 8 日

(13) Keiji Oguiso, Connecting certain rigid birational non-homeomorphic Calabi-Yau threefolds via Hilbert scheme", Hayama Symposium on Complex Analysis in several variables, Hayama, Japan, 2007 年 7 月 16 日

(14) Keiji Oguiso, KIAS School on Holomorphic Symplectic Geometry, Phoenix Park

(Pyeongchang), Korea, 2007年2月5日-9日 (five 2-hour lectures).

〔その他〕以下のコンファレンスの組織委員を務めた。

(1) Algebraic Geometry in East Asia, KIAS Seoul, Korea, November 11 - 15, 2008 (with Shigeyuki Kondo, Kazuhiro Konno, JongHae Keum, Sijong Kwak, Namhoon Lee).

(2) Kinosaki Symposium on Algebraic Geometry", Kinosaki, Hyogo, October 20-24 2008 (with Toshiaki Maeno, Masahiko Yoshinaga).

(3) Conference on Arithmetic and algebraic geometry", University of Tokyo, July 3-6 2008 (with Tomohide Terasoma, Masahiko Saito, Yuji Shimizu).

(4) UK-Japan Winter School 2008 - Algebraic and Symplectic Geometry, Mathematics Research Centre, University of Warwick, 7-11 January 2008 (with Jurgen Berndt, Jhon Bolton, Martin Guest, Yoshiaki Maeda, Mile Reid).

(5) Birational Automorphisms of Compact Complex Manifold and Dynamical System, Nagoya, Japan, August 2007 (with Shigeyuki Kondo and Shigeru Mukai).

(6) Higher dimensional Algebraic Geometry Echigo Yuzawa, Yuzawa, Japan, December 2006 (with Yujiro Kawamata and Hiromichi Takagi).

(7) Workshop on Derived Categories of Coherent Sheaves", KIAS, Korea, May 2006 (with Bumsig Kim and Yujiro Kawamata)

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

小木曾 啓示 (OGUIISO KEIJI)  
慶應義塾大学・経済学部・教授  
研究者番号 : 40224133

### (2)研究分担者

なし

### (3)連携研究者

なし