

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2009

課題番号：18540017

研究課題名（和文） 混合ホッジ構造のモジュライ空間のコンパクト化と log 幾何

研究課題名（英文） Compactifications of moduli spaces of mixed Hodge structure and log geometry

研究代表者

中山 能力 (NAKAYAMA CHIKARA)

東京工業大学・大学院理工学研究科・助教

研究者番号：70272664

研究分野：数論幾何

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：対数的幾何学、混合ホッジ構造、ホッジ理論、加藤-臼井空間、冪零軌道、 $SL(2)$ -軌道

### 1. 研究計画の概要

当研究の目的は、混合ホッジ構造のモジュライ空間を、log 幾何を用いてコンパクト化することである。具体的には log 混合ホッジ構造を無限遠点につけ加えることによって、混合ホッジ構造のモジュライ空間をコンパクト化することを目標とする。任意のホッジ型についてできれば理想的であるが、とりあえずは、枠組みと方針とを定式化して、いくつかの予想に問題を分割し、その上で、応用上重要ないくつかの混合ホッジ型の場合にそれらの予想を証明することをめざす。

### 2. 研究の進捗状況

(1) 加藤和也氏、臼井三平氏との共著である、カッターニ-カプラン-シュミットの多変数  $SL(2)$ -軌道定理の混合版を証明した論文が出版された。この結果は当初より、関連分野の様々な幾何的問題への応用が期待されていたが、パールシュタインはこの論文の結果を応用し、正規関数の零点集合の代数性を一般次元で示せたと発表した。これは有名な未解決問題であるホッジ予想と関係した結果である。当該研究の中での位置づけをいえば、この結果は、構成が期待されている、混合ホッジ構造のモジュライ空間の8つのコンパクト化の間の射のうち最も重要な、カッターニ-カプラン-シュミット写像の連続性を示すために用いられる予定である。

(2) 8つのコンパクト化のうちの一つ、ボレル-セール-コンパクト化についての論文が出版された（加藤和也氏、臼井三平氏との共著）。

その概要は以下の通りである。

- ① 混合ホッジ構造の場合のボレル-セール・コンパクト化を、ボレル-セール軌道を用いて、純ホッジ構造の場合と並行的に定義することができる。
- ② 実ベクトル空間のコンパクト化を用いて、ボレル-セール・コンパクト化の局所的な記述ができる。
- ③ ボレル-セール・コンパクト化が、局所コンパクト性などのよい性質を持つことを証明できる。

(3) 8つのコンパクト化のうちの一つ、 $SL(2)$ -軌道によるコンパクト化、その val 化、ボレル-セール・コンパクト化の val 化についての研究がほぼ終わり、論文をまとめている。その概要は以下の通りである。

- ① 混合  $SL(2)$ -軌道により、混合ホッジ構造のモジュライ空間をコンパクト化することができる。
- ② このコンパクト化には、少なくとも二通りの自然な位相と実解析構造とが入り、それぞれについて、局所的な記述ができる。定義の方法は、純な場合と同様な座標関数の他に、ボレル-セール持ち上げによる座標関数を用いる。 $SL(2)$ -軌道定理は、このコンパクト化を用いて自然に解釈される。
- ③ このコンパクト化の val 化から、ボレル-セール・コンパクト化の val 化へ自然な写像があるが、この写像は二通りのどちらの位相に関しても、連続とは限らない。

### 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由) 冪零軌道側のコンパクト化については研究中であるが、特に障害はみつかっていない。また、当初、任意のホッジ型については難しいと考えられていたが、現在までの部分 ( $SL(2)$ -軌道側のコンパクト化) は、任意のホッジ型について話ができている。

#### 4. 今後の研究の推進方策

(1) 当面は  $SL(2)$ -軌道側のコンパクト化についての論文のまとめを進める。現在 100 頁超の草稿があるが、これらのコンパクト化については、当初は全く予想していなかった興味深い現象がいくつかみつかり、ある程度時間をかけてその背景を見極めることが必要である。

(2) 余裕があれば冪零軌道側のコンパクト化も構成する。そのために、まずは、カッターニ-カプラン-シュミット写像が微分構造を保つことを確認する必要がある。

#### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

① Kazuya Kato, Chikara Nakayama, and Sampei Usui, Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, I. Borel-Serre spaces, *Advanced Studies in Pure Math.* 54, 187--222, 2009, 査読有

② Kazuya Kato, Chikara Nakayama, and Sampei Usui,  $SL(2)$ -orbit theorem for degeneration of mixed Hodge structure, *Journal of Algebraic Geometry*, 17, 401--479, 2008, 査読有

③ Takeshi Kajiwara and Chikara Nakayama, Higher direct images of local systems in log Betti cohomology, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 14, 291--323, 2008, 査読有

[学会発表] (計 2 件)

① Takeshi Kajiwara and Chikara Nakayama, Log abelian varieties (joint work with Kazuya Kato),  $p$ -adic method and its applications in arithmetic geometry, 2007, 2007. 6. 12, 東京大学駒場キャンパス

② Chikara Nakayama, Log abelian varieties and log Hodge structures, Hodge 理論・退化・特異点の代数幾何とトポロジー研究集会(第 4 回), 2008. 3. 11, 東