

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2006～2009
 課題番号：18540017
 研究課題名（和文） 混合ホッジ構造のモジュライ空間のコンパクト化と log 幾何
 研究課題名（英文） Compactifications of moduli spaces of mixed Hodge structure and log geometry
 研究代表者
 中山 能力（NAKAYAMA CHIKARA）
 東京工業大学・大学院理工学研究科・助教
 研究者番号：70272664

研究成果の概要（和文）：

log 幾何の手法を用いて、混合ホッジ構造のモジュライ空間のボレル-セール・コンパクト化および $SL(2)$ -コンパクト化を構成した。ボレル-セール・コンパクト化は、ボレル-セール軌道を用いて構成され、局所コンパクト性などのよい性質を持つ。 $SL(2)$ -コンパクト化は、 $SL(2)$ -軌道を用いて構成され、 $SL(2)$ -軌道定理（冪零軌道に $SL(2)$ -軌道を対応させる定理）を介して、冪零軌道によるコンパクト化（混合版加藤-臼井空間）と密接に関係する。

研究成果の概要（英文）：

We constructed the Borel-Serre compactification and the $SL(2)$ -compactification of the moduli space of the mixed Hodge structures by the method of log geometry. The Borel-Serre compactification is constructed by the Borel-Serre orbits and has nice properties such as local compactness. The $SL(2)$ -compactification is constructed by the $SL(2)$ -orbits and closely related to the compactification by the nilpotent orbits (the mixed version of Kato-Usui space) via the $SL(2)$ -orbit theorem, which associates an $SL(2)$ -orbit to a nilpotent orbit.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	400,000	0	400,000
2007年度	400,000	120,000	520,000
2008年度	400,000	120,000	520,000
2009年度	400,000	120,000	520,000
年度			
総計	1600,000	360,000	1960,000

研究分野：数論幾何

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：対数的幾何学、混合ホッジ構造、ホッジ理論、加藤-臼井空間、冪零軌道、 $SL(2)$ -軌道

1. 研究開始当初の背景

任意の重みの純ホッジ構造の (モジュライ) 空間のコンパクト化は、グリフィスの夢と呼ばれ、ホッジ理論における最も基本的な問題の一つであったが、1970 年頃に提唱されて以来、重み 1 以外では、いくつかの散発的な結果があるに過ぎなかった。

一方 \log 幾何とは、ひとことでいえば、いろいろな数学的対象 A の退化を扱いやすくする道具立てであり、 \log 幾何を使えば、いろいろな A に対して、 A の一般化である $\log A$ をつけ加えることによって、 A の (モジュライ) 空間を自然にコンパクト化して $\log A$ の空間にできるであろうという事が、 \log 幾何の始まった 1990 年頃から言われ続けてきた。

加藤和也氏と臼井三平氏とは 2003 年に発表された長大なプレプリント (2009 年出版) の中で、多くの技術的困難を克服しつつ、 A が純ホッジ構造の場合にこのプログラムを実行することによって、上記グリフィスの夢を一度に実現し、関係者を驚かせた。このコンパクト化は現在、加藤-臼井空間と呼ばれている。当研究の目的はこの加藤-臼井の結果をさらに混合版に拡張することで、従来は夢のまた夢でしかなかったが、問題設定としてはごく自然で多くの幾何的な応用を見込んだものであった。

2. 研究の目的

当研究の目的は、混合ホッジ構造のモジュライ空間を、 \log 幾何を用いてコンパクト化することであった。具体的には \log 混合ホッジ構造を無限遠点につけ加えることによって、混合ホッジ構造のモジュライ空間をコンパクト化することが目標であった。理想的には任意のホッジ型についてできると思われてはいたが、とりあえずは、枠組みと方針とを定式化し、いくつかの予想に問題を分割し、その上で、応用上重要ないくつかの混合ホッジ型の場合にそれらの予想を証明することをめざした。

3. 研究の方法

研究の方法は、研究者間の情報交換、意見交換、議論が主であった。特に、漠然とした萌芽段階での構想や微妙な印象などを伝えるには Eメールはきめ細かさ欠け、直接会って議論することが重要であった。また、情報を収集すると同時に、過去の議論の結果を適切に保存、管理し、効果的な議論に役立てた。

4. 研究成果

(1) 加藤和也氏、臼井三平氏との共著である、カッター-ニコプラン-シュミットの多変数 $SL(2)$ -軌道定理の混合版を証明した論文が出版された。この結果は当初より、関連分野

の様々な幾何的問題への応用が期待されていたが、Broznan-Pearlstein はこの論文の結果を応用し、正規関数の零点集合の代数性に関するグリーン-グリフィス予想を一般次元で示せたと発表した。これは有名な未解決問題であるホッジ予想の手前にある予想であった。当研究の中での位置づけをいえば、この多変数 $SL(2)$ -軌道定理の混合版は、構成が期待されている、混合ホッジ構造のモジュライ空間の 8 つのコンパクト化の間の射たちのうち最も重要な、カッター-ニコプラン-シュミット写像の連続性を示すために用いられる。

その後 Schnell も、上記 Broznan-Pearlstein とは独立に、グリーン-グリフィス予想の別証明を発表したが、その証明もやはり、この多変数 $SL(2)$ -軌道定理の混合版を本質的に用いている。

(2) 8 つのコンパクト化のうちの一つ、ボレル-セール・コンパクト化についての、加藤和也氏、臼井三平氏との共著論文が出版された。その概要は以下の通りである。

①混合ホッジ構造の場合のボレル-セール・コンパクト化を、ボレル-セール軌道を用いて、純ホッジ構造の場合と並行的に定義することができる。

②実ベクトル空間のコンパクト化を用いて、ボレル-セール・コンパクト化の局所的な記述ができる。

③ボレル-セール・コンパクト化が、局所コンパクト性などのよい性質を持つことを証明できる。

(3) 8 つのコンパクト化のうちの一つ、 $SL(2)$ -軌道によるコンパクト化 (以下 $SL(2)$ -コンパクト化) についての、加藤和也氏、臼井三平氏との共著論文を投稿することができた。この論文は約 100 頁であり、概要は以下の通りである。

①混合 $SL(2)$ -軌道の定義および冪零軌道との関係。

②混合 $SL(2)$ -軌道を用いた $SL(2)$ -コンパクト化の集合としての定義。

③符号付き対数構造の一般論。

④ $SL(2)$ -コンパクト化の二通りの自然な位相と実解析構造 (第一構造、第二構造) の定義。それぞれの局所的な記述。これらの定義の方法は、純な場合と同様な座標関数の他に、ボレル-セール持ち上げによる座標関数を用

いる。SL(2)-軌道定理は、このコンパクト化を用いて自然に解釈される。

⑤SL(2)-コンパクト化の大域的な性質。特に、第二構造は、各部分商の対応する空間と分解の空間との直積空間上固有という著しい性質を持つ。

⑥第一構造を用いた norm 評価の再定式化。

⑦ホッジ距離の退化、height pairing の退化との関係。

(4) 8つのコンパクト化のうち、中間ヤコビアン等の幾何的応用においては最も重要である、冪零軌道によるコンパクト化についての概要をまとめ、アナウンスメントとして投稿した(加藤和也氏、臼井三平氏との共著)。

(5) 一連の論文出版ないし研究発表を通して、ホッジ予想の研究者との交流が深まり、多くの有益な情報交換があった。例えば、これまでは扇の概念が基本的と思われていたが、実際には弱扇の方が、解析的ネロン模型等への応用上は重要であることがわかった。これにより、今後の冪零軌道によるコンパクト化の研究は、弱扇の文脈で展開していくことが予想される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

① Kazuya Kato, Chikara Nakayama, and Sampei Usui, Log intermediate Jacobians, Proceedings of the Japan Academy, Ser. A. 86, 73--78, 2010, 査読有

② Chikara Nakayama, Quasi-sections in log geometry, Osaka Journal of Mathematics 46 (4), 1163--1173, 2009, 査読有

③ Kazuya Kato, Chikara Nakayama, and Sampei Usui, Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, I. Borel-Serre spaces, Advanced Studies in Pure Math. 54, 187--222, 2009, 査読有

④ Kazuya Kato, Chikara Nakayama, and Sampei Usui, SL(2)-orbit theorem for degeneration of mixed Hodge structure, Journal of Algebraic Geometry, 17, 401--479, 2008, 査読有

⑤ Takeshi Kajiwara and Chikara Nakayama,

Higher direct images of local systems in log Betti cohomology, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 15, 291--323, 2008, 査読有

⑥ Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, and Chikara Nakayama, Logarithmic abelian varieties, Part I: Complex analytic theory, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 15, 69--193, 2008, 査読有

⑦ Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, and Chikara Nakayama, Analytic log Picard varieties, Nagoya Math. J., 191, 149--180, 2008, 査読有

⑧ Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, and Chikara Nakayama, Logarithmic abelian varieties, Part II. Algebraic theory, Nagoya Math. J., 189, 63--138, 2008, 査読有

⑨ Chikara Nakayama, A projection formula for log smooth varieties in log étale cohomology, Math. Z., 258, 915--924, 2008, 査読有

[学会発表] (計5件)

① Chikara Nakayama, Log abelian varieties, East Asia Number Theory Conference, 2009. 8. 20, 清華大学(北京)

② Chikara Nakayama, Relative rounding and submersivity of log smooth maps (joint work with Arthur Ogus), Symposium "Hodge theory and algebraic geometry": Occasion of the 60th birthday of Sampei Usui, 2009. 7. 1, 京都大学数理解析研究所

③ Chikara Nakayama, Log abelian varieties and log Hodge structures, Hodge 理論・退化・特異点の代数幾何とトポロジー研究集会(第4回), 2008. 3. 11, 東北学院大学工学部多賀城キャンパス

④ Takeshi Kajiwara and Chikara Nakayama, Log abelian varieties (joint work with Kazuya Kato), p-adic method and its applications in arithmetic geometry, 2007, 2007. 6. 12, 東京大学駒場キャンパス

⑤ Chikara Nakayama, Log mixed Hodge structures as subquotients of log pure Hodge structures, Log mixed Hodge theory and its geometric applications, 2006. 4. 21, 大阪大学豊中キャンパス

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中山 能力 (NAKAYAMA CHIKARA)

東京工業大学・大学院理工学研究科・助教

研究者番号：70272664

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし