

平成21年 4月30日現在

研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18540024
 研究課題名（和文） 交代符号行列，対称関数の組合せ論とその表現論，可積分系への応用
 研究課題名（英文） Combinatorics of alternating sign matrices and symmetric functions and applications to representation theory and integrable systems
 研究代表者
 岡田 聡一 (Soichi OKADA)
 名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
 研究者番号：20224016

研究成果の概要：この研究では，対称関数，古典群の指標を用いることにより，交代符号行列，平面分割の数え上げに現れる Hankel 行列式の変数化を与え，Gansner の公式の一般化となる逆平面分割の重みつき母関数を与えた．また，Macdonald 対称関数の理論を用いて，Painleve 型方程式の代数関数解に付随する特殊多項式の係数の正值性を証明した．さらに，数理論理学との関係から Young 図形にわたる和として表される 1 点関数の具体的表示を与え，特殊関数論との関係から小行列式を成分とする行列式に関する公式を発見した．

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,300,000	0	1,300,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,400,000	630,000	4,030,000

研究分野：組合せ論，表現論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：対称関数，古典群，行列式，交代符号行列，平面分割，Young 図形，Painleve 方程式

1. 研究開始当初の背景

この研究では，組合せ論，表現論的な視点から，

- A. 交代符号行列，平面分割の組合せ論と可積分模型への応用，
 B. 対称関数の組合せ論と Painleve 型方程式への応用，

の 2 つのテーマを扱った．この 2 つのテーマは独立ではなく，Young 図形の組合せ論，

行列式やパフィアンの等式を介して互いに結びついている．

A について，数え上げ問題は，代数的組合せ論の核となるものであり，その中心的な対象である平面分割 (plane partition) と交代符号行列 (alternating sign matrix) の数え上げ問題の研究を通じて，さまざまな基本的な手法が生み出されてきた．しかし，totally symmetric plane partition の q -

数え上げ問題や、交代符号行列と totally symmetric self-complementary plane partition の間の全単射の構成など、基本的な問題が未解決であり、交代符号行列と平面分割の完全な理解にはほど遠い。例えば、交代符号行列の数え上げに、対応する 6 頂点模型の分配関数の行列式・パフィアン表示を通じて、古典群の既約表現の次元が現れることが、岡田によって見出されているが、その本質的な理由は明らかではない。

B について、Painleve 方程式は、新しい特殊関数を発見しようという問題意識から Painleve によって発見された 2 階の非線形常微分方程式であるが、可積分系、代数曲面論などのさまざまな立場から研究が進み、差分版、 q -差分版、楕円差分版や高次元化が導入されている。Painleve 型方程式の特殊解については、梅村が有理関数解や代数関数解に付随した特殊多項式の族を導入したが、岡田は Young 図形の組合せ論を用いて具体的に表現できることを予想し、種子田が非常に巧妙で複雑な計算を用いて証明した。また、津田が KP 階層の一般化として、普遍有理指標を解とする非線形偏微分方程式の無限系列 (UC 階層と呼ぶ) を構成し、自己相似簡約を通じて Painleve 型方程式を得ている。

2. 研究の目的

この研究では、上で述べたような背景に基づいて、テーマ A では、

- ・ 平面分割、交代符号行列の本質を明らかにし、それらのもつさまざまな側面を統一的に理解、説明すること、

テーマ B では

- ・ Painleve 型方程式の特殊解の組合せ論的、表現論的な構造を明らかにすることを目標とした。

より具体的には、テーマ A では

- ・ 平面分割や交代符号行列の数え上げに現れるさまざまな行列式、パフィアンの表現論的な意味を明らかにすること、
- ・ 平面分割や交代符号行列の精密な数え上げに関するさまざまな予想を証明すること、
- ・ 交代符号行列と、最も対称性の高い平面分割である totally symmetric self-complementary plane partition の間に具体的なよい全単射を構成すること、などを、テーマ B では
- ・ UC 階層に付随する特殊多項式が非負整数係数の多項式であることを証明すること、
- ・ 梅村多項式などの特殊多項式と対称関数

の関係を明らかにすることによって、種子田による岡田予想の証明の簡易化を行うことなどを目的とした。

3. 研究の方法

テーマ A については、岡田、中西が表現論的側面を、石川が組合せ論的側面を、中西が可積分模型の側面を担当した。また、テーマ B については、岡田が対称関数、組合せ論の側面を、梅村が Painleve 型方程式の側面を、中西がソリトン方程式の側面を担当した。

国内で開催されるさまざまな研究集会、セミナーや、

- ・ Recent Advances in Algebraic Combinatorics, Centre de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal, Montreal, Canada, 2007 年
- ・ Combinatorial Representation Theory, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA, U.S.A., 2008 年
- ・ Combinatorics and Statistical Mechanics, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, U.K., 2008 年
- ・ Combinatorics and Statistical Physics, Erwin Schrodinger International Institute for Mathematical Physics, Wien, Austria, 2008 年

などの海外で行われた研究プログラムに参加し、講演、情報交換、討論などを行い研究を進めた。また、尾角 正人 (大阪大学)、落合 啓之 (名古屋大学)、洞 彰人 (名古屋大学)、山田 裕史 (岡山大学) 氏と協力して、国際研究集会 “Combinatorics and Representation Theory” を 2008 年 9 月 1 日～5 日に名古屋大学で開催した。

4. 研究成果概要

テーマ A においては、次のような研究成果が得られた。

- (1) 平面分割や交代符号行列の数え上げ問題では、Catalan 数や 2 項係数を成分とする Hankel 行列式が現れる (M. Desainte-Catherine and X. G. Viennot, I. M. Gessel and G. Xin). 岡田は、これらの行列式と表現論の関係を考察し、古典群の既約指標を用いた多変数化を与えることに成功した。これは、交代符号行列と totally symmetric

self-complementary plane partition の母関数の表示式を結びつけるのに役立つことが期待される。

- (2) 枠を指定した逆平面分割 (reverse plane partition) の母関数 (trace generating function) は鉤の長さを用いて表される (Gansner). 岡田は, 対称関数環上の作用素を用いて見通しのよい別証明を与え, その議論を拡張することによって Hall-Littlewood 関数や Macdonald 関数を用いて, 逆平面分割の新たな重みつき trace generating function を鉤の長さで表す公式を得た. この公式を d-complete poset (generalized Young diagram) に対して拡張することが今後の課題である.
- (3) 石川は, 交代符号行列 (あるいは対応する fully packed loop model) や平面分割の精密な数え上げ問題を考察し, 行列式・パフィアンを用いた表示や, 定数項 (積分) による表示を導いた. これは, 交代符号行列や平面分割に関するさまざまな予想の解決に向けての第 1 歩であると考えられる.
- (4) 中西は, 中井和香子とともに, 古典型量子アフィン代数の skew Young 図形に対応する表現の q -指標 (を与えると予想される) Jacobi-Trudi 型行列式に対して, パスおよび Young 盤を用いた組合せ論的表示を与えた. また, この結果を用いて, q -指標を漸化的に求めるアルゴリズムに関する Frenkel-Mukhin の予想に対する反例を与えた. これはこの分野の専門家にとって驚くべきことであった.

テーマ B においては, 次のような研究成果が得られた.

- (5) 津田によって導入された UC 階層の自己相似簡約を通して, 分割の対でパラメトライズされる普遍有理指標の特殊化として Painleve 型方程式の代数関数解が得られ, それに付随する特殊多項式の係数の正值性が観察されていた. この研究では, Macdonald 対称関数と 2 変数 Kostka-Foulkes 多項式の係数の正值性を利用して, 2 つの分割の一方が空分割である場合に, 上記の特殊多項式の係数の正值性の証明に成功した. 一般の場合については研究を継続中である.
- (6) 梅村は, 微分方程式に対する Galois 理論を提唱していたが, これが後に Malgrange によって提唱されたものと同値であることを示した. そして, 梅村の微分 Galois 理論が差分方程式などにも応用できることを明らかにした.
- (7) 中西は, 井上 玲, 伊山 修, 国場 敦夫,

鈴木 淳史との共同研究において, 一種の可積分方程式である T-system の周期性予想を定式化し, 明示公式, 行列式表示, cluster 代数・cluster 圏などを利用して, 多くの場合にその予想を証明した. この結果は, 量子群の表現の圏と非可換代数の表現の圏の間に新たな結びつきを与えた点に意義がある.

テーマ A, B を結び付ける Young 図形の組合せ論, 行列式・パフィアンの等式に関連して, 次のような研究成果が得られた.

- (8) 岡田は, 菅野浩明, 藤井篤之, 森山翔文との共同研究 (数理解析に動機がある) において, Young 図形における content のべき和の重みつき和 (1 点関数) に関する具体的な表示を与えた. 関連する研究が Stanley などによっても行われつつあり, 組合せ論においても興味をもたれている.
- (9) 岡田, 石川は, 伊藤 雅彦とともに, 小行列式を成分とする行列式に関する公式 (Cauchy-Sylvester の公式の変種) を発見し, Weyl 群対称性を持つ Jackson 積分に関する行列式などへの応用を与えた.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 19 件)

[1] 石川 雅雄, 岡田 聡一, 行列式・パフィアンに関する等式とその表現論, 組合せ論への応用, 数学 (論説), 掲載決定 (査読有).

[2] 岡田 聡一, Multivariate generalization of Hankel determinants of Catalan numbers and middle binomial coefficients, 数理解析研究所講究録「有限群・頂点作用素代数と組合せ論」, 掲載決定 (査読無).

[3] M. Ito and S. Okada, An application of Cauchy-Sylvester's theorem on compound determinants to a BC_n-type Jackson integral, Proceedings of the March 2008 Gainesville Conference on Partitions, q-Series and Modular Forms, 掲載決定 (査読有).

[4] H. Umemura, On the definition of Galois groupoid,

Asterisque 2008, Soc. Math. France, 掲載決定 (査読有) .

[5] W. Nakai, T. Nakanishi,
On Frenkel-Mukhin algorithm for q -character of quantum affine algebras, Adv. Stud. in Pure Math. "Exploration of New Structures and Natural Constructions in Mathematical Physics, Nagoya, 2007", 掲載決定 (査読有) .

[6] S. Fujii, H. Kanno, S. Moriyama and S. Okada,
Instanton calculus and chiral one-point functions in supersymmetric gauge theories, Adv. Theor. Math. Phys. 12 (2008), 1401--1428 (査読有) .

[7] H. Umemura,
Sur l'equivalence des theories de Galois differentielles generales, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 346 (2008), 1155--1158 (査読有) .

[8] M. Ishikawa,
Minor summation formula and a proof of Stanley's open problem, Ramanujan J. 16 (2008), 211--234 (査読有) .

[9] M. Ishikawa, A. Kasraoui and J. Zeng,
Statistics on ordered partitions of sets and q -Stirling numbers", SIAM J. Discrete Math. 22 (2008), 1105--1137 (査読有) .

[10] H. Umemura,
Invitation to Galois theory, in "Differential equations and quantum groups", 269--289, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 9, Eur. Math. Soc., Zurich, 2007 (査読有) .

[11] W. Nakai, T. Nakanishi,
Paths and tableaux descriptions of Jacobi-Trudi determinant associated with quantum affine algebra of type D_n , J. Algebraic Combin. 26 (2007), 253--290 (査読有) .

[12] W. Nakai, T. Nakanishi,
Paths and tableaux descriptions of Jacobi-Trudi determinant associated with quantum affine algebra of type C_n , SIGMA 3 (2007), 078, 20 pages (査読有) .

[13] S. Okada,
An elliptic generalization of Schur's Pfaffian identity, Adv. Math. 204 (2006),

530--538 (査読有) .

[14] M. Ishikawa, S. Okada, H. Tagawa and J. Zeng,
Generalizations of Cauchy's determinant and Schur's Pfaffian, Adv. Appl. Math. 36 (2006), 251--287 (査読有) .

[15] S. Okada,
Enumeration of symmetry classes of alternating sign matrices and characters of classical groups, J. Algebraic Combin. 23 (2006), 43--69 (査読有) .

[16] H. Umemura,
Galois theory and Painleve equations. In "Theories asymptotiques et equations de Painleve", 299--339, Semin. Congr., 14, Soc. Math. France, Paris, 2006 (査読有) .

[17] W. Nakai, T. Nakanishi,
Paths, tableaux and q -characters of quantum affine algebras: the C_n case, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006), 2083--2115 (査読有) .

[18] M. Ishikawa and M. Wakayama,
Applications of minor summation formula III, Plucker relations, lattice paths and Pfaffian identities, J. Combin. Theory Ser. A. 113 (2006), 113--155 (査読有) .

[19] M. Ishikawa, F. Jouhet and J. Zeng,
A generalization of Kawanaka's identity for Hall-Littlewood polynomials and applications, J. Algebraic Combin. 23, (2006), 395--412 (査読有) .

[学会発表] (計 24 件)

[1] S. Okada,
Trace generating functions of plane partitions, 62eme Seminaire Lotharingien de Combinatoire, 2009 年 2 月 23 日, Heilsbronn, Germany.

[2] 岡田 聡一,
Multivariate generalization of Hankel determinants of Catalan numbers and middle binomial coefficients, 有限群・頂点作用素代数と組合せ論, 2009 年 1 月 7 日, 京都大学数理解析研究所, 京都.

[3] S. Okada,
A compound determinant identity and its application, Workshop on Combinatorics

and Statistical Physics, 2008 年 5 月 22 日, Erwin Schrodinger International Institute for Mathematical Physics, Wien, Austria.

[4] S. Okada,
Multivariate generalisation of Hankel determinants of Catalan numbers and middle binomial coefficients, Workshop on Statistical-Mechanics and Quantum-Field Theory Methods in Combinatorial Enumeration, 2008 年 4 月 22 日, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, U.K.

[5] H. Umemura,
Examples in general Galois theory, Equations aux Derivees Partielles et Theorie de Galois Differentielle, 2008 年 10 月 6 日, Centre International de Rencontres Mathematiques, Luminy, France.

[6] H. Umemura,
General differential Galois Theory, Symbolic Analysis symposium, 2008 年 6 月 26 日, Hong Kong City University, Hong Kong.

[7] H. Umemura,
General difference Galois Theory, Algebraic Methods in Dynamical Systems, 2008 年 2 月 4 日~8 日, Barcelona Institute of Technology, Barcelona, Spain.

[8] 中西 知樹,
T-system の周期性について, 日本数学会年会, 2009 年 3 月 29 日, 東京大学, 東京.

[9] T. Nakanishi,
Q-system, T-system, and Y-system, Crystals and Tropical Combinatorics, 2008 年 8 月 29 日, 関西セミナーハウス, 京都.

[10] 石川 雅雄,
Enumeration problems of plane partitions and determinant generating functions, 組合せ論的表現論の拡がり, 2008 年 10 月 9 日, 京都大学数理解析研究所, 京都.

[11] 石川 雅雄,
平面分割の数え上げ問題と行列式・パフィアン, 組合せ論サマースクール 2008, 2008 年 9 月 8 日~10 日, カルチャーリゾートフェストーン, 沖縄.

[12] M. Ishikawa,
Enumeration problems of plane partitions and Pfaffian (determinant) expressions, Combinatorics and Representation Theory (The 8th International Conference by the Graduate School of Mathematics, Nagoya University), 2008 年 9 月 4 日, 名古屋大学, 名古屋.

[13] M. Ishikawa,
Littlewood's (Cauchy's) formulae of Schur functions and constant term expressions for the refined enumeration problems of TSSCPPs, Workshop on Combinatorics and Statistical Physics, 2008 年 5 月 27 日, Erwin Schrodinger International Institute for Mathematical Physics, Wien, Austria.

[14] 岡田 聡一,
Trace generating functions of plane partitions, 組合せ論的表現論の拡がり, 2007 年 10 月 23 日, 京都大学数理解析研究所, 京都.

[15] S. Okada,
Aspects of rational universal characters, 19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 2007 年 7 月 5 日, Nankai University, Tianjin, China.

[16] S. Okada,
An identity for the power-sums of contents and its application to gauge theory, Workshop on Combinatorial Problems Raised by Statistical Mechanics, 2007 年 2 月 19 日, Centre de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal, Montreal, Canada.

[17] 石川 雅雄,
Hankel determinants of Catalan, Motzkin and Schroder numbers and its q-analogues, 組合せ論的表現論の拡がり, 2007 年 10 月 23 日, 京都大学数理解析研究所, 京都.

[18] M. Ishikawa,
Refined enumerations of totally symmetric self-complementary plane partitions and lattice path combinatorics, 6th International Conference on Lattice Path Combinatorics and Applications, 2007 年 7 月 13 日, East Tennessee State University, Johnson City, TN, U.S.A.

[19] M. Ishikawa,

Refined enumerations of totally symmetric self-complementary plane partitions and constant term identities, 19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 2007年7月2日, Nankai University, Tianjin, China.

[20] M. Ishikawa and H. Tagawa, Schur function identities and hook length posets (contributed poster), 19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 2007年7月5日, Nankai University, Tianjin, China.

[21] H. Umemura, Foundation of general differential Galois theory, Integrabilite Dynamique, 2006年11月27日, Centre International de Rencontres Mathematiques, Luminy, France.

[22] H. Umemura, Differential Galois Theory and Painleve equations, The Painleve Equations and Monodromy Problems : Introduction, 2006年9月9日~14日, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, U.K.

[23] H. Umemura, On a general differential Galois theory, Differential equations and Singularities,

2006年7月9日, Tordesillas, Spain.

[24] 石川 雅雄, Euler-Mahonian statistics of ordered partitions, 組合せ論的表現論とその周辺, 2006年10月26日, 京都大学数理解析研究所, 京都.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡田 聡一 (Soichi OKADA)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 20224016

(2) 研究分担者

梅村 浩 (Hiroshi UMEMURA)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・名誉教授
研究者番号: 40022678

中西 知樹 (Tomoki NAKANISHI)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号: 80227842

(3) 連携研究者

石川 雅雄 (Masao ISHIKAWA)
鳥取大学・大学教育総合センター・准教授
研究者番号: 40243373