

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540031

研究課題名（和文） 非可換不足群をもつブロック多元環の加群圏の導来圏の構造について

研究課題名（英文） Structure of the derived categories of block algebras with non-commutative defect groups

研究代表者

宇野 勝博 (UNO KATSUHIRO)

大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号：70176717

研究成果の概要：有限群のモジュラー表現論の分野における代表的な未解決問題にブルーエ予想があるが、これは特殊な状況下での予想である。この予想が一般的な状況の場合にどのように拡張できるかを追求し、多くの例で計算を実行した。その結果、一般化と考えられる予想を定式化することができた。これは現在の所、指標と呼ばれる関数値についての予想であるが、代数的な構造（加群圏など）についての予想のあるべき姿についての示唆も含んでいる。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	750,000	4,150,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：群論、加群、導来圏、ブロック多元環

## 1. 研究開始当初の背景

有限群の表現論においては、ブラウアーの提出した問題など重要な未解決問題があり、これらは、ブルーエ予想、デイド予想に集約されて来た。このうち、ブルーエ予想は、不足群が可換の場合に限るが、ブロック多元環の加群圏とその多元環とブラウアー対応している部分群のブロック多元環の加群圏とが導来同値になるという予想であり、これまでにいくつかの群について正しいことが確認されている。しかし、不足群が非可換である場合は、ブロック多元環の加群圏の間に導来同値を与えるような部分群が存在すると

は限らない。詳細は全く何も解明されていないのが現状である。

## 2. 研究の目的

不足群が非可換なブロック多元環については、ブロック多元環の構造が、より簡単なブロック多元環達からの関手の像により生成されることは分かっている。そこで、本研究では、どのようなブロック多元環達からの関手の像で生成されるのか、また、そのようなブロック多元環達の最も小さい集合はどのようなものになるのか、さらに、このような生成系の間にはどのような関

係があるのかを解明することを目的とする。より、具体的には、以下の通りである。

(1) アーベル圏の関手について、ホモロジー代数的な概念を定義し、その基本性質を記述する。

(2) 低い階数の不足群をもつブロック多元環の多くの例の計算し、データを蓄積する。

(3) 低い階数の不足群をもつブロック多元環について、加群圏の導来圏をホモロジー代数的に記述する。

(4) 一般の階数の不足群をもつブロック多元環の場合に、上と同様のことを試みる。

### 3. 研究の方法

(1) アーベル圏のホモロジー代数についての概念を整備する。特に、アーベル圏の完全列、核、余核、生成系などの基本概念、加群圏の三角圏としての導来圏から安定圏への標準的な射とこれらの概念の関係についての基本事項を整理・確認する。

(2) 階数が2である非可換な不足群をもつブロック多元環の例を計算し、加群圏の導来圏の構造を記述し、それらが、部分群のブロック多元環の加群圏の導来圏とどのような関係になっているかを調べ、それらのデータを蓄積する。

(3) 上記の記述結果が不足群が非可換の場合へのブルーエ予想の拡張と考えられるか、また、階数が2である非可換な不足群をもつ場合のデイド予想の証明に繋がるかを考察する。

(4) 低い階数の非可換不足群をもつブロック多元環の例のデータを蓄積する。

### 4. 研究成果

(1) 加群圏の導来圏については、いくつかの具体例について、関手の核、余核、生成系の計算を実行したが、一般的な記述を得るまでには至らなかった。一方で圏の **covering** および **skew group** を導入しての記述についての新たな結果が得られ、Lie 環との関係なども明らかになってきた。このことを受け、複数の加群圏の関係を **covering** および **skew group** 圏を用いて記述できるかどうかの考察を進めているところである。

(2) 階数が2である非可換な不足分をもつブロック多元環については、このうち位数が素数の3乗である場合の主ブロック多元環

について分類を完成し、このブロック多元環のなかで、不足群上の fusion system が同じ場合、ほぼすべての例について、既約通常指標の対応を与えることができた。詳細は以下の通りである。

①有限単純群の分類定理を用い、同じ不足群および fusion system をもつ主ブロック多元環をすべて分類し、それらに既約通常指標の対応で、指標の不足数等の不変量を保存し、かつ、対応から得られる一般指標がある種の分離条件および整数条件をみたすものが存在することを確認した。

このふたつの条件は、ブルーエ予想における条件を不足群の正規部分群を用いて相対的に変更したもので、相対的分離条件、相対的整数条件と呼ばれるべきものである。また、得られた指標の対応は、局所部分群と呼ばれる部分群間の指標の対応とも整合性がある。これは、ブルーエ予想のうち指標の部分の状況を完全に一般化したものと言える。

②上の結果において、相対的な条件をみたく対応には、一般的な推移律が成立しないことを確認した。このため、位数が素数の3乗になる場合についての限定的な推移律を証明することで、多くの主ブロック間での既約指標の対応の存在を確認することに成功した。

③また、この対応が相対的分離条件、相対的整数条件をみたしていることは、加群圏については、導来圏ではなく相対射影性を加味した圏を導入する必要があることを示唆している。このような圏の定式化が今後の課題である。

以上をまとめた論文は、査読者との質疑応答も終了し、掲載決定を待つ段階である。また、この結果がデイド予想の証明に繋がることは確実に現在その最終確認を行っている。

(3) 階数が3である非可換な不足群をもつブロック多元環についても計算を実行し、一般線型群、シンプレクティック群において、上の(2)と同様の相対分離条件、相対整数条件を加味したブルーエ予想の拡張が指標について成立することを確認した。

(4) 上の(2)で考察された場合の中には、元々のブルーエ予想と同じように導来同値が存在する例もある。導来同値の存在証明についても、非可換な不足群で中心が巡回群、かつ、中心による剰余群が可換であるの場合に適用できるよう結果の改良を行い、具体例の確認時に用いた。

(5) 散在型単純群では、階数 4 以上の不足群をもつブロック多元環についても指標対応の計算を行い、多くのデータを得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

1. Akihiko Hida, Hyoue Miyachi: Module correspondences in Rouquier blocks of finite general linear groups, 査読有, Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups, Progress in Mathematics, に掲載決定(2010年発行予定).
2. Shigeo Koshitani, Naoko Kunugi: Trivial source modules in blocks with cyclic defect group, 査読有, Mathematische Zeitschrift に掲載予定(2009年発行予定).
3. Katsushi Waki: Decomposition numbers of non-principal blocks of  $J_4$  for characteristic 3, 査読有, Journal of Algebra, 321巻, 2009年, 2171-2186.
4. Shigeo Koshitani, Naoko Kunugi, Katsushi Waki: Broue's Abelian defect group conjecture holds for the Janko simple group  $J_4$ , 査読有, Journal of Pure and Applied Algebra, 212巻, 2008年, 1438-1456.
5. Naoko Kunugi, Tomoyuki Wada: Eigenvalues of Cartan matrices of principal 2-blocks with abelian defect groups, 査読有, Journal of Algebra, 319巻, 2008年, 4404-4411.
6. Hideto Asashiba: Domestic canonical algebras and simple Lie algebras, 査読有, Mathematische Zeitschrift, 259巻, 2008年, 713-754.
7. Hida: Control of fusion and cohomology of trivial source modules, 査読有, Journal of Algebra, 317巻, 2007年, 462-470.

[学会発表] (計 31 件)

1. 浅芝秀人: Covering theory of categories without free action and colimit orbit categories, Representation Theory Day, 2009年2月12日, University of Paderborn.
2. 功刀直子, 越谷重夫: 有限群の表現論における離散的有限単純群  $J_4$  に対してのブ

ルエ予想, 日本数学会秋季総合分科会, 2008年9月24日, 東京工業大学.

3. 功刀直子, 和田俱幸: Eigenvalues of Cartan matrices of principal 2-blocks with abelian defect groups, 日本数学会秋季総合分科会, 2008年9月24日, 東京工業大学.
4. 脇克志: About Decomposition Numbers of  $J_4$ , 第41回環論および表現論シンポジウム, 2008年9月7日, 静岡大学.
5. 宇野勝博: Isometries of characters in extra-special defect group, Duality and Involutions in Representation Theory, 2008年8月19日, National University of Ireland.
6. 浅芝秀人: Skew monoid categories and derived equivalences, International Conference on Representations of Algebras XIII, 2008年8月8日, Sao Paulo.
7. 功刀直子, 有限群の表現論におけるブルエ予想, 第53回代数学シンポジウム, 2008年8月5日, いわて県民情報交流センター.
8. 功刀直子, 和田俱幸: 可換2-シロー部分群をもつ群における主ブロックのカルタン行列の固有値, 第25回代数的組合せ論シンポジウム, 2008年6月24日, 北海道大学.
9. 浅芝秀人: Covering functors, skew group categories and derived equivalences, 第11回代数群と量子群の表現論研究集会, 2008年5月26日, 岡山県青年館.
10. 宇野勝博: Fusion systems and correspondence of characters, 第11回代数群と量子群の表現論研究集会, 2008年5月26日, 岡山県青年館.
11. 宇野勝博, 榎崎亮: Perfect isometryとその拡張について, 日本数学会年会, 2008年3月25日, 近畿大学.
12. 浅芝秀人: Skew group categories and derived equivalences, Seminar on Representation Theory of Algebras, 2008年2月12日, University of Bielefeld, Germany.
13. 功刀直子: Derived equivalences for blocks with defect groups having cyclic subgroups of index  $p$ , UCSC Algebra Seminar, 2008年2月1日, University of California Santa Cruz.
14. 宇野勝博:  $[P, P]$ -perfect isometry I, 有限群論と代数的組合せ論, 2007年12月17日, 京大会館.
15. 脇克志: GAP による既約 Brauer 指標の計算, 第7回「代数学と計算」研究集会, 2007年12月4日, 首都大学東京.

16. 脇克志: GAPを利用した有限群論, 数学ソフトとフリードキュメント5, 2007年9月20日, 東北大学.
17. 功刀直子: On Broue's abelian defect group conjecture in representation theory of finite groups, 第5回日・中・韓・環論国際シンポジウム, 2007年9月13日, 国立オリンピック記念青少年総合センター.
18. 馬場良始: On colocal pairs, 第5回日・中・韓・環論国際シンポジウム, 2007年9月12日, 国立オリンピック記念青少年総合センター.
19. 浅芝秀人: Root spaces of simple Lie algebras realized by Hall algebras of domestic canonical algebras, Seminar on Representation Theory of Algebras, 2007年8月31日, University of Bielefeld, Germany.
20. 浅芝秀人: Covering functors, orbit categories and derived equivalences, Seminar on Representation Theory of Algebras, 2007年8月31日, University of Bielefeld, Germany.
21. 功刀直子: Derived equivalences for blocks of finite groups having normal subgroups of index  $p$ , 有限群のコホモロジー論とその周辺, 2007年8月28日, 京都大学数理解析研究所.
22. 飛田明彦: Mackey functor and cohomology of finite groups, 有限群のコホモロジー論の研究, 2007年8月27日, 京都大学数理解析研究所.
23. 浅芝秀人: Covering functors, orbit categories and derived equivalences, International Conference on Representations of Algebras, 2007年8月23日, Nicolaus Copernicus University, Poland.
24. 浅芝秀人: Root spaces of simple Lie algebras realized by Hall algebras of domestic canonical algebras, Representation of finite dimensional algebras and Lie Theory, 2007年6月18日, 京都大学数理解析研究所.
25. 功刀直子: Trivial Source Modules in Blocks with Cyclic Defect Groups, 群論とその周辺, 2006年12月19日, 京大会館.
26. 浅芝秀人: Covering functors, orbit categories and derived equivalences, 原始形式の圏論的構成II, 2006年12月19日, 京都大学数理解析研究所.
27. 飛田明彦, 対称群のブルエ予想, 環論とその周辺, 2006年11月5日, 名古屋大学
28. 功刀直子: 有限群のモジュラー表現におけるブルエ予想, 日本数学会秋季総合分科会特別講演, 2006年9月19日, 大阪市立大学.
29. 浅芝秀人: Cyclic quiverとDynkin graphから眺めた多元環の表現論における2つの流れ(導来同値とホール代数), 日本数学会秋期総合分科会特別講演, 2006年9月19日, 大阪市立大学.
30. 飛田明彦, Mackey functor and cohomology of finite groups, 第39回環論および表現論シンポジウム, 2006年9月17日, 広島大学.
31. 功刀直子: Derived Equivalence 入門 (I) (II), 第9回代数群と量子群の表現論研究集会, 2006年5月19日, 20日, タナベ名古屋研修センター.

[その他]

ホームページ: 大阪教育大学リポジトリ  
<http://ir.lib.osaka-kyoiku.ac.jp/dspace/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

宇野 勝博 (UNO KATSUHIRO)  
 大阪教育大学・教育学部・教授  
 研究者番号: 70176717

### (2) 研究分担者

浅芝 秀人 (ASASHIBA HIDETO)  
 静岡大学・理学部・教授  
 研究者番号: 70175165

脇 克志 (WAKI KATSUSHI)  
 山形大学・理学部・准教授  
 研究者番号: 30250591

功刀 直子 (KUNUGI NAOKO)  
 東京理科大学・理学部・講師  
 研究者番号: 50362306

飛田 明彦 (HIDA AKIHIKO)  
 埼玉大学・教育学部・准教授  
 研究者番号: 50272274

馬場 良始 (BABA YOSHITOMO)  
 大阪教育大学・教育学部・准教授  
 研究者番号: 10201724

平木 彰 (HIRAKI AKIRA) (18, 19 年度)  
 大阪教育大学・教育学部・准教授  
 研究者番号: 90294181

### (3) 連携研究者

平木 彰 (HIRAKI AKIRA) (20 年度)  
 大阪教育大学・教育学部・准教授  
 研究者番号: 90294181