

平成 21 年 5 月 22 日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540034

研究課題名（和文） 代数幾何学における導来圏の研究

研究課題名（英文） Research on derived categories in algebraic geometry

研究代表者

石井 亮 (ISHII AKIRA)

広島大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：10252420

研究成果の概要：

A 型クライン特異点の極小解消上の例外集合に台を持つ接続層の導来圏に関して、Bridgeland の定義した安定性条件の空間を決定し、特にそれが連結かつ単連結であることを示した。また、ダイマー模型にそれぞれ適当な条件を課すと、付随する簾の表現のモジュライ空間が、対応する 3 次元特異点のクレパント解消になり、簾の道代数はその非可換クレパント解消であることを示した。特殊 McKay 対応との関係も明らかにした。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,200,000	0	1,200,000
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：安定性条件，特異点，導来圏，ミラー対称性，ダイマー模型

## 1. 研究開始当初の背景

Bridgeland 氏の定義した安定性条件の空間は、物理学者、数学者の双方から興味を持たれていた。2 次元以上では、連結性、単連結性の示された例はなかった。研究代表者と上原は、A 型特異点の最小解消の例外集合に台を持つ接続層の導来圏の自己圏同値の群の生成系を決定していた。安定性条件の空間は、自己圏同値の群と深い関わりにあることが Bridgeland 氏により示されており、上記の場合に安定性条件の空間を詳細に調べるべきだと思われた。

## 2. 研究の目的

代数多様体の接続層の有界導来圏の構造について考察し、特にその自己圏同値のなす群の構造を決定したり、 $t$  構造を記述することを目的とする。また、導来圏に対して Bridgeland により定義された、安定性条件の空間の具体的な記述を得るべく研究する。

## 3. 研究の方法

安定性条件の空間の連結性を示すには、任意の安定性条件を、ツイスト関手を繰り返し適用することにより、標準的な開集合に移すということを考えた。単連結性を示すには、

導来圏へのアフィン型のブレイド群の作用が忠実であることを示す必要があった。これは A 型特異点に対するホモロジー的ミラー対称性を用いることで解決を図ったが、標数 2 の体上の場合から標数零の体上の場合へ持ち上げる、という手法を取った。ダイマー模型が非退化であるとき、付随する籠の表現のモジュライがアフィントーリック多様体のクレパント解消になっていることを示すには、非退化という条件からトーラスの作用を使ってトーラス固定点の解析に帰着できることを使った。格子多角形の変形に対応するダイマー模型の変形を記述するためには、特殊マッカイ対応を用いた。

これらのことを実行するために、内外の多くの研究者と会い、研究打ち合わせを行った。また、現象を正しく把握するため、多くの例の計算を試行錯誤的に行った。

#### 4. 研究成果

Bridgeland の定義した、三角圏の安定性条件の空間について、上原北斗氏、植田一石氏とともに、具体的な場合に詳しく考察した。A 型有理二重点の極小解消上の例外集合に台を持つ接続層の導来圏の安定性条件の空間について精密な結果を得ることが出来た：安定性条件の空間を記述することは、導来圏の三角圏としての自己圏同値の群を記述することと密接に関係している。

Bridgeland の定義した安定性条件の空間について研究した。特に、2次元 A 型有理二重点の極小解消の上の、例外集合に台を持つ接続層の有界導来圏に対する場合に徹底的に研究を行い、この空間の完全な記述を得た。まず、安定性条件の空間は連結であることを示すことができた。これは、2次元以上の代数多様体に対する安定性条件の空間としては、その連結性の証明された最初の例である。より具体的には、次のような記述が得られた：2次元 A 型特異点の極小解消の上の、例外集合に台を持つ接続層の有界導来圏の安定性条件の空間は、対応するアフィンワイル群の複素鏡映面（の加算無限個の和集合）の補集合と、複素平面から原点を除いたものの直積の、普遍被覆空間になる。また、安定性条件の空間を記述することは、導来圏の三角圏としての自己圏同値の群を記述することと密接に関係している。この群は、アフィン型のブレイド群の巡回群による拡大と特異点の完備化された局所環の自己同型群との半直積と、シフト関手の生成する自由アーベル群との直積である。特に、全ての自己圏同値は Fourier-向井変換として表されることもわかった。この成果は、上原北斗氏、植田一石氏との共著論文として投稿された。この論文の中で、アフィン型のブレイド群の作用の忠実性を示す際に鍵となったのは、A 型特

異点に対するホモロジー的ミラー対称性である。すなわち、2次元  $A_n$  型特異点の極小解消の上の、例外集合に台を持つ接続層の有界導来圏は、1 の  $(n+1)$  乗根の上で退化するファイブレーションの構造を持つ、あるシンプレクティック多様体の、隣り合う 1 の  $(n+1)$  乗根同士を結ぶ直線上に消滅サイクルを並べてできるラグランジュ球面のなす、導来深谷圏に圏同値である、ということである。

トーラス上の 2 部グラフから、関係式つき籠を構成する方法が物理学者たちにより提唱されている。ここで、2 部グラフというのは、頂点が黒と白の 2 色に塗り分けられたグラフのことである。2 部グラフに関しては、黒と白の頂点のマッチングである、パーフェクトマッチングという概念が重要である。パーフェクトマッチングが十分に存在するとき、それらの間のハイトチェンジという整数の組を考えることにより、格子多角形が定義できる。2 部グラフがよい条件を満たすとき、対応する関係式つき籠は、この格子多角形の定める 3 次元ゴレンシュタインアフィントーリック多様体の、非可換クレパント解消を与えると期待されていた。植田一石氏との共同研究においては、まず、2 部グラフが「非退化」と呼ばれる条件を満たすとき、関係式つき籠の、次元ベクトルが  $(1, \dots, 1)$  であるような表現のモジュライ空間は、対応する 3 次元アフィントーリック多様体のクレパント解消であることを示した。

さらにダイマー模型に付随するモジュライ空間と籠の道代数について研究した。対応する格子多角形の一つの頂点を取り除き、他の格子点の凸閉包を取るという操作を考える。例えば三角形のときにこれを考えると、3 次元アフィン空間上の群軌道のヒルベルトスキームから 2 次元アフィン空間上の群軌道のヒルベルトスキームを取り除くことに対応する。この様子は、2 次元の場合の Wunram と Riemenschneider によるいわゆる特殊マッカイ対応を用いると良く理解でき、特に(群が  $SL$  に入らないときは)特殊でない表現に対応する類語反復的直線束の直和が上記補集合上の接続層の導来圏の傾斜対象になることがわかった。一般のダイマー模型については、両立性という概念を定義しそれを仮定すると、その三角形の埋め込みに対応するダイマー模型とマッカイ籠との対応を考えることにより、モジュライ空間の補集合上の傾斜対象を作ることができ、上記操作に対応するダイマー模型の操作を定義することができた。この操作により、類語反復的直線束の直和が傾斜対象である、という性質が両方向に遺伝することを示すことができた。これを用いると、両立的ダイマー模型に対してモジュライ空間と道代数の導来同値が成立すること、および、任意の格子多

角形に対して対応する両立的ダイマー模型が存在することを示すことができた。これらはダイマー模型と叢の道代数に関する基本的な問題であり、植田一石氏との共同研究により解決することができた。ダイマー模型に関する両立性の概念は重要である。

さらに、幾何学的不変式論を使ってモジュライ空間を作るときの安定性のパラメータを動かすことにより、任意の射影的クレパント解消がこのようなモジュライ空間として実現できることもわかった。

この問題は、ミラー対称性を通じていわゆるコアメーバの研究とも関わり、また、ファノ多様体/スタック上の螺旋とも強く関わっている重要な問題であり、今後のさらなる発展を期待している。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

(1) Ichiro Shimada; Transcendental lattices and supersingular reduction lattices of a singular K3 surface, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361 (2009), 909–949, 査読あり

(2) Akira Ishii and Kazushi Ueda; On moduli spaces of quiver representations associated with dimer models, **RIMS Kôkyûroku Bessatsu B9 (2008), 127–142, 査読あり**

(3) Ichiro Shimada; Singularities of dual varieties in characteristic 2., *Algebraic geometry in East Asia—Hanoi 2005*, 299–331, *Adv. Stud. Pure Math.* 50, 2008, 査読あり

(4) Ichiro Shimada; On arithmetic Zariski pairs in degree 6, *Adv. Geom.* 8 (2008), 205–225, 査読あり

(5) Yoshifumi Tsuchimoto; Equations in  $p$ -curvature and intertwiners, *Osaka J. Math.* 45(2008), 737–746, 査読あり

(6) Y. Tsuchimoto; Non commutative algebraic spaces of finite type over Dedekind domains, *J. Math. Kyoto Univ.* 46(2006), 435–452, 査読あり

(7) M. Inaba, K. Iwasaki and M. Saito; Dynamics of the sixth Painlevé equation, *Sémin. Congr.* 14(2006), 103–167, 査読あり

(8) M. Inaba, K. Iwasaki and M. Saito; Moduli of stable parabolic connections, Riemann–Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI, Part I, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 42(2006), 987–1089, 査読あり,

(9) M. Inaba, K. Iwasaki and M. Saito; Moduli of stable parabolic connections, Riemann–Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI, Part II, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 45(2006), 387–432, 査読あり

[学会発表] (計 16 件)

(1) 上原北斗, Fourier–Mukai numbers of minimal elliptic rational surfaces, 第4回代数・解析・幾何学セミナー, 2009年2月19日, 鹿児島大学理学部

(2) 島田伊知朗, Splitting curves for the double covering branching along a plane curve of degree 6, 第4回代数・解析・幾何学セミナー, 2009年2月18日, 鹿児島大学理学部

(3) Akira Ishii, Dimer models and the special McKay correspondence, *COE-COW Tokyo: An International Conference in Algebraic Geometry*, 2008年12月19日, University of Tokyo

(4) Hokuto Uehara, Tilting generators via ample line bundles, *Interactions Between Noncommutative Algebra and Algebraic Geometry*, 2008年10月30日, BIRS, Banff, Canada

(5) Akira Ishii, Stability conditions on  $A_n$  singularities, **ICTS Conference on Vector Bundles**, 2008年3月7日, TIFR, Mumbai, India

(6) Hokuto Uehara, Tilting generators on algebraic varieties, **ICTS Conference on Vector Bundles**, 2008年3月6日, TIFR, Mumbai, India

(7) 石井 亮, Bipartite graphs on tori and crepant resolutions, 第3回代数・解析・幾何学セミナー, 2008年2月19日, 鹿児島大学理学部

(8) 石井 亮, On brane tilings and crepant resolutions, トーリック多様体の理

論の展開と応用, 2008年1月12日, 東北大学大学院理学研究科

(9) Akira Ishii, Brane tilings and crepant resolutions of some three-dimensional toric singularities, *Categorical Aspects of Algebraic Geometry in Mirror Symmetry*, 2007年12月7日, 京都大学数理解析研究所

(10) Hokuto Uehara, Derived equivalence for stratified Mukai flop on  $G(2,4)$  via tilting generators (with Y. Toda), *Categorical Aspects of Algebraic Geometry in Mirror Symmetry*, 2007年12月5日, 京都大学数理解析研究所

(11) 石井 亮, Brane tilings and moduli of quiver representations (with K. Ueda), *高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学*, 2007年9月12日, 九州大学数理解析研究所

(12) 上原北斗, Tilting generators for morphisms with two dimensional fibers (with Y. Toda), *高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学*, 2007年9月12日, 九州大学数理解析研究所

(13) 土基 善文, On non commutative algebraic spaces, *代数幾何セミナー2007*, 2007年8月9日, 東京大学玉原国際セミナーハウス

(14) 石井 亮, On the moduli of quiver representations associated with brane tilings, *高次元代数多様体とベクトル束*, 2007年7月3日, 京都大学数理解析研究所

(15) 石井 亮, Stability conditions on  $A_n$  singularities, *ミラー対称性に関わる可積分系と代数幾何学*, 2006年12月26日, 東京大学数理科学研究科

(16) 石井 亮, 導来圏とその安定性条件, *代数学シンポジウム*, 東京大学数理科学研究科, 2006年8月7日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

石井 亮 (ISHII AKIRA)  
広島大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 10252420

### (2) 研究分担者

土基 善文 (TSUCHIMOTO YOSHIFUMI)  
高知大学・理学部・准教授  
研究者番号: 10271090

稲場 道明 (INABA MICHIAKI)  
京都大学・大学院理学研究科・講師  
研究者番号: 80359934

上原 北斗 (UEHARA HOKUTO)  
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号: 80378546

島田 伊知朗 (SHIMADA ICHIRO)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 10235616

木村 俊一 (SHUN-ICHI KIMURA)  
広島大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 10284150

### (3) 連携研究者