様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年６月２９日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００６～２００８
課題番号：１８５４００４３
研究課題名（和文）　ベクトル束を用いた高次元代数幾何符号の構成

研究課題名（英文）　CONSTRUCTION OF HIGHER DIMENSIONAL ALGEBRAIC-GEOMETRIC CODES BASED ON VECTOR BUNDLES

研究代表者
中島　徹　(NAKASHIMA TORU)
日本女子大学・理学部・教授
研究者番号：２０２４４４１０

研究成果の概要：情報を通信する過程では通常雑音によって誤りが生じる。これらの誤りを訂正するための数学的手法は誤り訂正符号とよばれ、コンパクトディスクの再生から火星探査機との交信に至るまで広く用いられている。中でも現在最も性能の良い符号は、多項式の共通零点が表す図形である代数多様体の幾何学を用いた代数幾何符号である。当研究では、ベクトル束とよばれる対象を用いる事によって高次元の代数多様体から新しいタイプの誤り訂正符号を構成し、その性質を解明する事に成功した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
18 年度	900,000	0	900,000
19 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
20 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,700,000	540,000	3,240,000

研究分野：代数幾何
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何符号、ベクトル束、相対的 Reed-Muller 符号

１．研究開始当初の背景

（１）情報を通信する過程では、通常雑音によって誤りが生じる。この誤りを訂正するための数学的手法を誤り訂正符号という。特に有限体上の n 次元ベクトル空間の k 次元部分空間として得られる誤り訂正符号 C は線形符号と呼ばれ、n を長さ、k を次元という。C の 0 でない元の非零成分の個数の最小値 d は最小距離と呼ばれ、C が訂正可能な誤りの個数を決定する重要な量である。これら n,k,d を C のパラメータといい、符号の性能はこれらから定まる情報伝送率 $R=k/n$ と相対最小距離 $\delta=d/n$ によって測られる。符号の無限列が与えられたとき、R とδがどの様な漸近的振る舞いを示すかという問題は、どの様なパラメータをもつ線形符号が存在するかという問題と関係しているため、符号理論の重要な研究課題の１つとなっている。符号の漸近的性質に関しては、Gilbert-Varshamov 限界式と呼ばれる結果が知られており、長い間この評価式は最良のものであると思われてきた。

（２）Goppa によって代数曲線を用いた符号が導入された事によって符号理論に大きな革命が起こった。Goppa 符号は、Riemann-Roch の定理に代表される代数幾何の諸結果を用いる事によりそのパラメータを決定でき，符

号の構成に大きな自由度があるという長所を備えている。実際 Tsfasman-Vladut-Zink は、モジュラー曲線を用いる事によって Gilbert-Varshamov 限界式を超える性能をもつ Goppa 符号を構成した。この研究以降、代数曲線に基づく誤り訂正符号の研究が盛んに行われる様になった。一方、Manin-Vladut によって、有限体上定義された任意次元の射影多様体 X とその上の直線束 L を用いて誤り訂正符号を構成できる事は指摘されていた。即ち、L の大域切断を X の有理点で評価する事によって定まる線形写像の像として線形符号 C(X,L)が定義される。特に very ample な直線束 L から定義される符号は射影的 Reed-Muller 符号と呼ばれ、Lachaud によって研究された。しかしながら、射影的 Reed-Muller 符号の最小距離を決定するためには、L の切断が定義する因子の持つ有理点の個数を評価する必要がある。その様な評価の方法は射影空間やグラスマン多様体等の特別な多様体を除いて、一般の多様体の場合には知られていなかった。そのため、高次元代数幾何符号に関する研究は、最近まで余り進展が見られなかった。

（３）しかし、最近 S.Hansen によって代数曲面から定義される代数幾何符号の研究が行われ、線織曲面の場合に符号の最小距離の下からの評価式が得られた。その方法は、代数曲面の交点理論を符号のパラメータの決定に応用するという画期的なものであった。この結果によって高次元代数幾何符号の研究が大きく進展した。例えば、トーリック 多様体から定義される代数幾何符号に関しては、J.P.Hansen, Joyner らが研究を行った。当研究の研究代表者である中島は、曲線上のベクトル束Eに付随した射影束P(E)から定義される射影束符号を考察し、E に関する適当な安定性条件を仮定すれば Hansen の結果が一般化できる事を証明した。また、曲線上のグラスマン束、2 次超曲面束の場合にも符号のパラメータに関する結果を得た(Codes on Grassmann bundles and related varieties, J.Pure and Applied Algebra 199(2005),235-244)。そこで、更に広いクラスの多様体から符号を構成する事が自然に問題となってきた。

２．研究の目的

1 で述べた様に、曲線上の射影束 P(E)及びグラスマン束から定義される符号は当研究代表者の中島によって研究が始められた。当研究は、この研究を更に発展させる事を目的としている。既に射影束符号やグラスマン束符号の一般的性質の研究は成されているので、次に与えられたパラメータをもつ符号がいつ存在するのかが問題になる。また、これらの符号を更に一般化する事は重要である。射影束P(E)は射影空間の１次元の族と看做す事ができるから、より一般に曲線上のファイバー構造π:X→C をもつ多様体 X が考えられる。当研究では、曲線 C 上の射影束 P(E)の部分多様体 X と X 上のπに関して相対的に very ample な直線束 L から定義される代数幾何符号 C(X,L)を考察した。C(X,L)はπ:X→C のファイバーの射影的 Reed-Muller 符号の族をいわば「積分」して得られた符号と解釈できるため、我々はこの様な符号 C(X,L)を「相対的 Reed-Muller 符号」と名づけた。重要な問題は、相対的Reed-Muller符号がどの程度Goppa 符号より広いクラスの符号を定義するのか、また Goppa 符号を超える性能をもつ相対的 Reed-Muller 符号が構成可能かどうかという事である。当研究では、具体的には以下の様な３つの問題の解決を目標とした。

（１）相対的 Reed-Muller 符号のパラメータの決定：
π:X→C の相対的 Reed-Muller 符号のパラメータが、各ファイバーの射影的 Reed-Muller 符号のパラメータとどの様な関係にあるかを解明する。次にその関係を用いて相対的 Reed-Muller 符号のパラメータを決定する。

（２）相対的 Reed-Muller 符号の漸近的性質の解明：
（１）で得られた結果を用いて、漸近的に良い性質をもつ相対的 Reed-Muller 符号の無限列を構成する。

（３）旗束(flag bundle)上の相対的 Reed-Muller 符号の研究：
曲線上のベクトル束に付随するグラスマン束を更に一般化し、ベクトル束の部分束の列から成る旗束から定義される相対的 Reed-Muller 符号の性質を研究する。

また、上に挙げた（１）～（３）の目的を達成するためには正標数のベクトル束の理論と符号の関係を解明する必要が生じると予想されるので、この様なベクトル束の幾何学の研究も並行して行う事にした。従来の代数幾何符号の理論では、代数多様体上のベクトル束（即ち局所自由層）は殆ど用いられてこなかった。当研究の特色は、ベクトル束の幾何学を代数幾何符号の研究に応用するという点にある。ベクトル束は階数と次数という 2 つの自由度をもっているため、Goppa 符号を超える性能をもつ相対的 Reed-Muller 符号を構成できる可能性もあると期待していた。もしこれに成功すれば、符号理論に大きな意義をもつことが予想された。

３．研究の方法

当研究では、以下に述べる（１）～（５）の様な数学的手法を用いる事によって研究を遂行した。また、研究上必要な図書や消耗品を購入し、関係する研究集会へ参加した。

（１）　代数多様体のサイクルの交点理論
有限体上の射影代数多様体の代数的サイクル達に対しては、交点数と呼ばれる整数が定義される。我々は相対的Reed-Muller符号の最小距離の評価式を得るために交点理論を応用する S.Hansen の方法を用いた。これにより、多様体上の適当な正値性をもつ直線束と因子の交点数を計算して因子の有理点の個数を評価する事ができる。
（２）　p-半安定ベクトル束の理論
有限体上のベクトル束は任意回数のフロベニウス写像による引き戻しが半安定であるとき、p-半安定と呼ばれるが、この様なベクトル束に付随する射影束上ではnef直線束の存在を示すのが容易である。我々は、p-半安定ベクトル束の理論を用いて射影束上から定義される相対的Reed-Muller符号の研究を行った。
（３）　安定束のモジュライ空間
与えられたパラメータを持つ符号を構成するためには適当な正値性をもち、有限体上定義された安定束の存在が必要になるが、これは安定束のモジュライ空間が有理点をもつ事に同値である。一方、ベクトル束の階数と次数が互いに素である場合にはモジュライ空間はFano多様体になる事が知られている。そこで我々は Fano 多様体の有理点に関する Esnault の定理を用いる事により、安定束の存在問題を考察した。
（４）　完全交叉多様体の有理点
当研究に於いて考察した多様体の中で最も重要なものは、射影空間の超曲面達の交わりとして得られる完全交叉多様体である。この様な多様体の有理点の個数に関しては、既にGhorpade-LachaudによってLang-Weil型の評価式が証明されている。当研究では、この結果を完全交叉多様体をファイバーにもつ多様体の場合とに応用する事によって最小距離の評価を得る事を試みた 。
（５）　旗束の幾何学
一般の型の旗多様体の交点理論は Schubert calculus と呼ばれ、自然数の分割の個数や、Young 図形など表現論、組み合わせ論と関係しているので、その幾何学はグラスマン多様体の場合より複雑になる。しかし、(1,r-1)型の旗多様体は、2 つの射影空間の直積の超曲面になるので、その上の交点数の計算は比較的容易であり、この様な旗多様体の射影的Reed-Muller符号のパラメータはRodierによって研究されている。そこで、我々は(1,r-1)型の旗束から定義される相対的 Reed-Muller 符号C(X,L)のパラメータを考察した。

４．研究成果
当研究では、3.で述べた様な方法を用いて曲線上の射影束符号及び相対的Reed-Muller符号に関する研究を行い、その結果以下の様な成果を挙げる事ができた。
（１）　射影束符号の存在定理
Bを有限体上定義された種数gの代数曲線とする。我々は、B上の射影束符号がどの様なパラメータを持ち得るかについて考察した。Hansenの方法に従い、交点理論を応用するためには、B上のベクトル束Eで付随する射影束P(E)上にnef直線束が具体的に構成可能なものを見つける必要がある。我々は、eとrが互いに素な自然数でe/r>2g-1を満たすならば、B上に大域切断で生成された階数r、次数eの安定ベクトルEが存在する事を証明した。この証明には、3.（３）で述べた様に安定束のモジュライ空間の理論が用いられる。この様なEに付随する射影束P(E)上の普遍直線束O(1)はnefになる事が分かる。そこでL=O(1)+bfの形をしたP(E)上のnef直線束を取り、Lから定義された射影束符号Cのパラメータを考察した。まず初めに射影π：P(E)→Bに対して射影公式とRiemann-Rochの定理を適用する事によってCの次元を計算した。次に、我々は以前中島によって得られた結果を応用する事により、Cの最小距離dをg、r、e及びBの有理点の個数を用いて下から評価する式を得た。この証明には、3.（１）、（２）で述べた様なP(E)上の交点理論とp-半安定束の理論が用いられる。この結果により、与えられたパラメータをもつ射影束符号の存在に関して重要な存在定理が示された事になる。
（２）　射影束符号の漸近的性質
Artin-Schreier方程式で定義された曲線の被覆を取る事によって得られる曲線族上の射影束符号の無限列を構成し、その漸近的挙動を考察した。この様なArtin-Schreier曲線族はGilbert-Varshamov限界式を超える性能をもつGoppa符号の構成のために以前にGarcia-Stichtenothによって導入されたものであり、曲線の有理点の個数と種数は非常に良い漸近的振る舞いを示す。我々は、階数2の安定ベクトル束を各曲線上にうまく選ぶ事により、（１）で述べた結果を用いて付随する射影束符号の無限列で情報伝送率Rと相対最小距離δが作る数列が共に正の値に収束する様なものを見つける事ができた。これまで、Goppa符号以外の代数幾何符号で漸近的に良い性質ものは知られていなかったので、我々の結果は高次元代数幾何符号が従来のGoppa符号と同様に漸近的に良い性質をもつ事を実証できたという意味で、非常に意義が大きいと考えられる。

（３）相対的Reed-Muller符号のパラメータの性質
曲線B上のファイバー構造をもつ多様体Xとは、全射π:X→Bをもつ射影多様体である。（１）、（２）で研究した射影束P(E)の一般化

として、我々はXとその上のπ-very ampleな直線束から定義される相対的Reed-Muller符号C(X,L)のパラメータを考察した。その結果、C(X,L)の最小距離の下からの評価をファイバー上の射影Reed-Muller符号の最小距離及びファイバーの有理点の個数を用いて表す式を証明する事に成功した。この様なタイプの結果は代数幾何符号の研究に於いて初めて得られたものである。我々は、この評価式を用いる事によって、射影束内の完全交叉多様体から定まる相対的Reed-Muller符号のパラメータを具体的に計算する事ができた。この計算には、3.（４）で述べた様に、射影空間の完全交叉多様体の有理点の個数に関するGhorpade-Lachaudの評価式を用いた。また、我々はファイバーに特異点を許した２次超曲面束の場合を考察し、長さ、次元、最小距離等のパラメータに関して詳細な結果を得る事ができた。この結果は、以前に中島によって行われたファイバーが特異点をもたない２次超曲面束の場合の研究を一般化するものである。また、Weierstrass方程式によって射影平面束に埋め込まれた楕円曲面から定まる相対的Reed-Muller符号Cのパラメータについても具体的な計算を行った。

（４） 旗束から定まる相対的Reed-Muller符号

曲線B上のベクトル束Eに対して、その部分束から定まるグラスマン束の上の相対的Reed-Muller符号は、当研究代表者の中島によって以前研究されていた。グラスマン束は、更にEの部分束の列から定まる旗束Fl(E)→Bに一般化される。我々は、(1,r-1)型のFl(E)上の相対的Reed-Muller符号を考察した。この型の旗束は２つの射影束のファイバー積に埋め込めるから、その上の交点数の計算は表現論を用いる事なしに行えるので容易であるという利点がある。更に、3.（５）で述べた様に(1,r-1)型の旗多様体の場合には、射影Reed-Muller符号のパラメータはRodierによって研究されている。このRodierの結果と（３）の結果を用いる事によって、我々は(1,r-1)型の旗束の相対的Reed-Muller符号のパラメータを決定する事ができた。

（５） まとめ

従来の代数幾何符号の研究では、主として代数多様体上の直線束しか考察されてこなかったが、当研究では高階のベクトル束を代数幾何符号の研究へ応用するという新しい手法を開発する事ができた。この様なベクトル束の手法は、今後代数幾何符号の理論に於いて益々重要な役割を果たすと期待される。当初期待していたGilbert-Varshamov限界式を超える性能をもつ相対的Reed-Muller符号の構成は残念ながらできなかったが、今後解決すべき重要な課題であると思われる。当研究で行ったベクトル束を用いた代数幾何符号の研究は、現在何人かの研究者によって更に発展させられている。例えば、射影束符号に関しては、最近Hitching-Johnsenによって更に詳細な研究が行われている。また、Savinは曲線上のベクトル束の評価写像を用いて新たな型の代数幾何符号の構成を行った。この様なベクトル束符号はGoppa符号の新しい一般化を与えるものであり、大変興味深い。当研究代表者である中島は、この様なベクトル束符号を高次元多様体に拡張する事を目標として現在研究中である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　10　件）

① <u>T.Nakashima</u>,
Minimum distance of relative Reed-Muller codes, Appl.Algebra Eng.Commun.Comput. 20(2009), 123-132(査読有り)

② T.Abe, <u>H.Terao</u>,<u>M. Yoshinaga</u>,
Totally free arrangements of hyperplanes, Proc.Amer.Math.Soc.137(2009),1405-1410(査読有り)

③ <u>T.Nakashima</u>,
Brill-Noether problems in higher dimensions, Forum Math. 20(2008), 145-161(査読有り)

④ <u>T.Nakashima</u>,
Existence of stable vector bundles on Calabi-Yau manifolds, RIMS Kokyuroku Bessatsu B9(2008). 1977-1983(査読有り)

⑤ H.Kamiya, A.Takemura, <u>H.Terao</u>,
Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers, J.Algebraic Combin. 27(2008), 317-330(査読有り)

⑥T.Abe, <u>H.Terao</u>, M.Wakefield,
The Euler multiplicity and addition-deletion theorems for multiarrangements, J.London Math.Soc.(2)77(2008), 335-348(査読有り)

⑦ <u>T.Nakashima</u>
Strong Bogomolov inequality for stable vector bundles, J.Geom.Phys.57(2007), 1977-1983(査読有り)

⑧ T.Abe, <u>H.Terao</u>, M.Wakefield,
The characteristic polynomial of a multiarrangements , Adv.Math.215(2007), 825-838(査読有り)

⑨ <u>H.Terao</u>
Chambers of arrangements of hyperplanes and Arrow's impossibility theorem, Adv.Math.214(2007),366-378(査読有り)

⑩ <u>T.Nakashima</u>

Error-correcting codes on projective bundles, Finite Fields and Their Appl.12(2006), 222-231(査読有り)

〔学会発表〕(計　1　件)
①中島　徹
“Existence of stable bundles on Calabi-Yau manifolds“ 2007年7月4日「高次元代数多様体とベクトル束」（京都大学数理解析研究所)

［その他］
①中島　徹
Who’s Who in the World, 26 th Edition に登録

６．研究組織
(1)研究代表者
中島　徹(NAKASHIMA TORU)
日本女子大学・理学部・数物科学科・教授
研究者番号：20244410
(2)研究分担者
寺尾　宏明(TERAO HIROAKI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：90119058
マーティン　ゲスト(MARTIN GUEST)
首都大学東京・都市教養学部・教授
研究者番号：10295470

(3)連携研究者
なし