

平成 21 年 6 月 8 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18540047

研究課題名（和文） 有限簡約代数群の表現とその応用

研究課題名（英文） Representations of finite reductive groups and applications

研究代表者

篠田 健一（SHINODA KEN-ICHI）

上智大学・理工学部・教授

研究者番号： 20053712

研究成果の概要： 有限簡約群は線型群（行列群）の中でも良い性質を持った群で、有限群の構成要素である単純群の無限系列を含むため、その表現を研究することは重要である。その通常表現については G. Lusztig 等によってその大枠が完成されている。これらの結果を有限群のガウス和の研究に応用しゲルファンダーグラフ表現の指標値との関係についても一般線型群や4次斜交群の場合に明らかにした。また、ヘッケ環のマルコフトレースについても、その一般化に成功した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	540,000	3,540,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：群論、有限群の表現論、指標和、ヘッケ環

1. 研究開始当初の背景

ガウス和は 1801 年にガウスにより考えられその正確な値の決定にはガウスでさえ 4 年を要したという。この和は有限素体に付随したものと考えられ、一般の有限体に対する拡張はダベンポートとハッセにより 1934 年になされた。

E. Lamprecht は 1955 年に有限非可換環のガウス和の研究を提唱し、表現との基本的な関連についてのべた。

この非可換な有限環のガウス和について初めて決定的な結果を得たのは近藤武（1963）であり、有限行列環について J. A. Green

の結果を応用することにより各既約表現に対応するガウス和を具体的に与えた。

近藤の結果は有限環というよりはむしろ有限群、一般線型群、のガウス和というべきであり、その方向で、有限簡約代数群の場合のガウス和についてその基本的な性質を述べたのは斉藤—篠田（2001）である。G. Lusztig 等による結果を本質的に使っている。

なお、全ての既約表現ではなく 1 次の表現の場合には、D. S. Kim らによる一連の結果が 1996 年から発表されている。

このように有限環ないし有限群のガウス和というのは長い間関心が持たれてきた興味

深い対象であり、実数体の場合のガンマ関数に対応することから、それぞれの有限群ないしは有限環との関係がより明らかにされることが望まれる。

また一方では、有限簡約代数群の表現として既約表現をほとんど全て含むような大きいけれど大切な表現である Gelfand-Graev 表現がある。この表現の自己準同型環を考えると、この環は可換環となり、その表現の指標値は、実はガウス和と関係する。このことは2次の一般線型群の場合には Gelfand と Graev によりすでに注意され (1962)、一般の次数の一般線型群については Curtis-笹田 (2004) によりその関係が示された。

また、有限簡約代数群の表現にはワイル群の表現がその骨格として関係をしており、それを非可換化した岩堀—ヘッケ環、さらには対応するリー環の非可換化である量子群の表現も一連の研究対象であり、これらに關係をする結果ほど深いものとなる。

特に岩堀—ヘッケ環は位相幾何や、量子群との Weyl-Schur 関係で 1980 年代半ばに再認識された重要な対象である。

位相幾何との関連では A 型および B 型のマルコフトレースがその不変量として知られていた。

2. 研究の目的

上で述べたように有限簡約代数群、ワイル群、量子群、岩堀—ヘッケ環は互いに關係しあう数学的に大きな研究対象である。

大きくは、これらの表現論を研究することが目的であるが、この研究では「1. 研究当初の背景」で述べたように、有限群のガウス和について有限群そのものとの關係をより明らかにし、さらに有限簡約代数群に対しては Gelfand-Graev 表現の自己準同型環の表現の指標値とガウス和の關係についてより明らかにすることが目的である。

また岩堀—ヘッケ環や量子群についてもその表現について研究を進める。

3. 研究の方法

(1) 斜交群の場合にガウス和と Gelfand-Graev 表現の自己準同型環の表現について具体的に計算をする。この計算には一部で行列の複雑な計算に計算ソフトを使用する。

(2) 有限簡約代数群とは限らない有限群に対しそのガウス和を計算する。さらに有限環

の場合にも拡張する。

(3) 岩堀—ヘッケ環についてそのマルコフトレースを研究する。

(4) 数学の研究の一般的な方法は、情報の収集をし、計算例など例を集め、推測し証明をするということであるが、この研究も例外ではない。

4. 研究成果

(1) 4 次斜交群について計算を行った。ガウス和についてはこの場合には斉藤—笹田 (2001) により計算されている。したがって、Gelfand-Graev 表現についてその自己準同型環の表現の指標値を求めた。

Gelfand-Graev 表現は極大ユニポテント群の正則指標 ψ を群全体に誘導した表現である。したがって e を対応する原始巾単位とすると Gelfand-Graev 表現の自己準同型環 H は $H = e C G e$ と表すことができる。ここで G は q 元体上の 4 次斜交群である。この環の基底を求めることは容易である。自然基底と呼ばれるが Bruhat 分解に対応して 4 種類ある。(一般の場合にはランクを 1 とすると 2^l あることが分かっている) これらに対して既約表現の指標値を計算した。計算には C.W. Curtis (1993) により得られた式を応用した。

4 種類のうち一つは本質的に単位元なので他の 3 種類が問題であるが、そのうちの 2 種類はいわば第 1 段の Kloosterman 和に対応し、最長元に対応するものはいわば第 2 段の Kloosterman 和に対応することが分かった。これはガウス和の計算からもある程度予測できたことである。

これから一般的な場合を予測すると、ランク分だけ基本的 (独立) な指標値、指標和 (具体的にはガウス和、Kloosterman 和など) が存在し他の指標値はこれらから何らかの操作 (畳み込み積のようなもの) で得られるのではないかと思われる。この予想は Curtis-笹田 (2004) で証明された事実とも整合性がある。なおこれらの結果については発表準備中である。

また 4 次一般斜交群についても同様の計算を行った。和の形が少し異なるが、中心が連結になっても、この場合はそれほど結果に変わりなかった。

(2) ガウス和は有限簡約代数群に限られるものではない。他の有限群に関するガウス和の研究も始めた。

まず考えるべきは対称群であろう。これについてはまとまった閉じた式で表すことができた。この結果は有限コクセター群に拡張できるものである。これについては発表準備中である。

なおこの計算の過程で、岩堀—ヘッケ環や有限量子群のガウス和も考えることが自然であることが分かった。

(3) 岩堀—ヘッケ環のマルコフトレースについて研究を行った。これは主に共同研究者である五味靖により遂行された。

(W, S) を有限コクセター系、H を対応する岩堀—ヘッケ環とする。H 上のトレース関数 τ が次の条件を満たすときパラメータ z に対するマルコフトレースという：

(M1) $\tau(1)=1$

(M2) $\tau(hTs)=z\tau(h)$ for all s in S and h in the Hecke algebra generated by $S-\{s\}$.

この定義はすでに知られている A 型 B 型の場合を拡張したものであり、標準的対称トレースは $z=0$ とした条件を満たす。

さて、W の自然表現を与える空間の対称テンソル代数と外積代数のテンソル積からなる Koszul 複体を考え、さらにその上の W の類関数を考える。パラメータをいれ、斉次成分ごとのトレース関数が分離されるようにしておく。

この類関数に対し Lusztig によって定義された非可換フーリエ変換をほどこしこれを自然な W の表現と H の表現の全単射により H の表現に移す。すると

定理 (五味) 上に得られた H 上のトレース関数はあるパラメータ (正確に決められるがこの報告書では省略する) に対するマルコフトレースであり、さらに、H の放物型部分環に制限すると、またその環のマルコフトレースとなっている。

この結果は今までの A, B 型にのみ知られていた結果をすべての有限コクセター群に拡張したものであり、さらに複素鏡映群にも拡張される自然なアイデアに基づいており、実際に Cyclotomic Hecke Algebra については五味により拡張されている。

(4) 中島は量子群の表現を結晶基底を中心に研究を続け、旗多様体上の幾何結晶の実現や完全結晶の研究を行った。都築と角皆はそれぞれ整数論の立場から研究を続け、都築は対称空間の算術的離散商上の保型関数につ

いて、角皆はガロア群の構成問題について研究を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

① Ken-ichi Shinoda, Gauss sums and Gelfand-Graev representations, 第 10 回代数群と量子群の表現論研究集会報告集、10 巻、2007、154—162. 査読無

② Toshiki Nakashima, Affine Geometric crystal of type $G_2^{(1)}$, Contemporary Mathematics, vol. 442, 2007, 179—192. 査読有

③ Yasushi Gomi, The Markov traces and the Fourier transforms, Journal of Algebra, vol. 303, 2006, 566—591. 査読有

④ Yasushi Gomi, The Fourier transforms determine the Markov traces, 数理解析研究所講究録、no. 1497, 2006, 71—78. 査読無

⑤ Toshiki Nakashima, Geometric crystals and affine crystals, Contemporary Mathematics, vol. 413, 2006, 157—171. 査読有

⑥ Masao Tsuzuki, Green Currents for modular cycles in arithmetic quotients of complex hyperballs, Pacific Journal of Mathematics, vol. 227, 2006, 311—359. 査読有

[学会発表] (計 6 件)

① Toshiki Nakashima, Geometric Crystals on flag varieties and unipotent radicals, 2008 年度日本数学会総会、2008 年 9 月 26 日、東京工業大学

② Masao Tsuzuki, Spectral square means of period integrals for wave forms on real hyperbolic spaces, 研究集会 [Automorphic representations, Automorphic forms, L-functions, and related topics], 2008 年 1 月 21 日、数理解析研究所

③ Ken-ichi Shinoda, Gauss sums and Gelfand-Graev representations, 第 10 回代数群と量子群の表現論研究集会、2007 年 6 月 2 日、上智軽井沢セミナーハウス

④ Yasushi Gomi, The Markov traces on Iwahori-Hecke algebras and cyclotomic Hecke algebras, 第 10 回代数群と量子群の表現論研究集会、2007 年 5 月 31 日、上智軽井沢セミナーハウス

⑤ Yasushi Gomi, The Markov traces and Lusztig's Fourier transforms, 2006 年度日本数学会年会、2006 年 3 月、中央大学

[その他]

A member of organizing committee, of
The 6th International Conference by
Graduate School of Mathematics, Nagoya
University, “Representation Theory of
Algebraic Groups and Quantum Groups 06”,
held at Nagoya University, June 12-17,
2006.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

篠田 健一 (SHINODA KEN-ICHI)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：20053712

(2) 研究分担者

五味 靖 (GOMI YASUSHI)

上智大学・理工学部・講師

研究者番号：50276515

中島 俊樹 (NAKASHIMA TOSHIKI)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：60243193

都築 正男 (TSUZUKI MASAO)

上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：80296946

角皆 宏 (TSUNOGAI HIROSHI)

上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：20267412

(3) 連携研究者

なし