

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540051

研究課題名（和文）孤立特異点の代数幾何的不変量と可換環論的分類

研究課題名（英文） Classification of isolated singularities by means of algebraic geometric studies of invariants

研究代表者

泊 昌孝 (TOMARI MASATAKA)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：60183878

研究成果の概要（和文）：

泊は、いわゆる 95 の分類から外れる超曲面単純 K3 特異点の方程式が、あと 5 つのクラスに限られるための、十分条件を見つけた。そのうち、4 つのクラスはすでに存在がベロネーゼ環を付随する次数付き環に用いて見つける方法で知られているものだったが、完全な新発見の特異点がひとつ見つかった。渡辺は、F-threshold とイデアルの整閉包、密着閉包との関係、F-threshold と重複度の関係などを研究し、多くの成果を得た。

研究成果の概要（英文）：

Tomari found a sufficient condition for the new 5 classes of hypersurface simple K3 singularities would be the last of 95+5 classes. The four of these 5 classes are the classical one found in the Ishii-Tomari theory on Veronese subring of famous 95 classes, but the other one is completely new one. Watanabe has been studying F-threshold, integral closures, and tight closures of several ideals and got many results.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,000,000	630,000	3,630,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何学、特異点

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 3次元超曲面特異点が有理特異点を有する為の、最少埋め込みから得られる filtration に関する判定問題として関連する Reid 氏の予想について、興味ある反例を発見した。それは従来期待されていた 95 の重みつき多項式のグループから少し外れたものの最初の発見でもあった (石井-泊)。「無駄な方程式を許す」考え方による分類論は、現在も研究代表者自身にとって、重要な問題である。

(2) 近年の奥間智弘氏の研究と泊の結果を総合することで、複素数上定義されたゴレンスタイン 2次元楕円型特異点の特異点解消過程による特徴づけが、関係式  $L = p_g$  の成立を背景に完成した。星型特異点解消をもつクラスについて、楕円型と同様な論法が適用できないかと、常に考えてきた。

## 2. 研究の目的

代表者は、特異点の代数幾何的不変量を、特異点解消を通じて可換環論的に決定しようという問題意識を常に持っている。

ここで述べる代数幾何的な不変量として想定するのは、

(A) 特異点の局所環の Hilbert-Samuel 関数から定まる重複度や埋め込み次元などの不変量；

(B) 特異点の局所コホモロジーに関する不変量；Cohen-Macaulay 性、標準加群の生成元の数 (Cohen-Macaulay type)、や Gorenstein 性、

(C) 局所環の因子類群、その torsion 元から定まる巡回被覆、さらにその反復によって得られるアーベル被覆、そして

(D) いわゆる特異点の種数と呼ばれる不変量；幾何種数  $pg$ 、L2-多重種数 などである。

今回、いくつかの基本的な問題を再確認しながら、以下の問題に取り組んできた。

(1) filtered ring の立場から、特異点の多重種数の接錐のデータにより評価。これは、泊-渡辺の filtered ring の理論の一般論にあたる部分を、このような不等式問題に定式化して、多重化し一般化しようという問題である。等号が成り立つ場合の特異点の分類 (接錐との同等特異性の問題)。接錐が孤立特異点を持つ整域となる場合の上からの評価、および接錐が Gorenstein 環または、更に広く Cohen-Macaulay 環となる場合の下からの評価、そして、その誤差項の解析。

(2) ゴレンスタイン 2次元星形特異点 (例外集合の双対グラフは星形であるもの) の同等特異性問題。今、この特異点は、中心曲線から定まる filtration によって、その接錐の正規化として定まる次数付き特異点と、特異点解消上で変形にむすばれる。また、接錐の正規性がそれらが特異点レベルで同等特異変形で結ばれるための条件である (泊-渡辺の filtered ring の理論)。

## 3. 研究の方法

(1) 以前おこなった接錐が Gorenstein 環になる場合の下からの評価を、Cohen-Macaulay の場合に拡張する為、一次元の場合の多重種数についての研究がさらに進展中である。誤差項の解析も一次元について行うことをまず手始めにした。

(2)奥間による楕円型特異点についての同特異点問題への肯定的進展がある一方、大きな不変量を持つ場合には、星形であっても変形に結ばれない場合が Nemethi 達によって発見されている。それらは、石井-泊が発見した Reid 予想の反例と類型の構成である。更なる例の構成も興味があるが、ここでは、彼らのアプローチを参考に泊-渡辺の filtered rings の論文 (1989) で或る程度追いつめた算術種数 2 の場合の進展を具体的な方程式系を持つ場合に限定して、計算を試みることから始めた。

(3)分担者の渡辺敬一には、内外の多くの研究者との交流を通じて、特異点論全般に勢力的に関わると共に、泊・渡辺の filtered blowing-up の理論に、個々の問題を投げかけ続けることを、期待した。分担者の松浦豊には、代数幾何の基礎理論および数論に関する広い見地から、基本的な文献の収集に関する協力、および基礎理論へのアドバイスを求め続けた。

#### 4. 研究成果

(1)長く問題となっている単純K3特異点 (3次元 strictly log canonical exceptional singularity) の分類に関して、次の結果を得た。

定理. 4次元複素平面の原点の近傍で定義された3次元超曲面孤立3重点が、適当な座標系  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  とその座標に対する重み付け  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  があって、定義式の重み付きテイラー展開が次の2条件を満たすと仮定する。(A) 初項が非退化な2次式の2乗になる。(B) 定義式の全体が指定された重みに対するある種のワイエルシュトラス表現をもつ。このような仮定をみたす定義式にもつ特異点について、simple K3 singularity

ならば、それらは、次の5つの重みに応じて異なるタイプのいずれかに同型である。重みのみをここでは記す。  $p=(3, 3, 3, 4)$ 、 $(3, 6, 9, 8)$ 、 $(3, 9, 15, 12)$ 、 $(9, 12, 15, 16)$ 、 $(6, 9, 12, 12)$  の5つの重みに対して条件 (A) (B) が詳しい表示として表現できる互いに同型にはならないクラスである。

これらは、重み付き射影空間内の完全交差K3曲面の重みをかえる退化操作でえられる特異点である。5つのタイプのうち、4つは Ishii-Tomari で既にベロネーゼ部分環をとる操作で発見されていたものである。5つ目の特異点は完全な新発見の特異点であり、かつての Reid 予想の反例もあたえるクラスになる。今回想定された十分条件の妥当性は、exceptional log canonical singularity の分類論でも問題にされているものである。

(2)渡辺は、正標数の環のイデアルの組に対するF-thresholdの研究が主要課題であった。F-thresholdの概念はlc thresholdの概念と深く関係し、multiplier idealのJumping coefficientと関連している。C. Huneke、高木らと共同研究として、F-thresholds について、次数付き環のパラメーターイデアルについてのCohen-Macaulay の仮定を外しての重複度予想の成立を確かめた。また、F-threshold の定義において、F-pure の仮定が必要だったが、この仮定がかなり弱めることを示した。

(3)泊は、2次元星型例外集合をもつ超曲面特異点について、その中心フィルトレーションから決まる接錐のゴレンスタイン性を、同等特異性と絡めて調べ、泊・渡辺の論文にて未解決な例として挙げた  $p_a=2$  特異点について、2重点という少し強い前提のもとに接錐が2重点になる事を証明した。同じグラフをもつ超曲面特異点は3重点になる可能性もあるが、

それを排除する予想が、特異点解消過程の不変量の解析より可能性の分類のもと部分的に示された。

(4) 泊は、2次元正規特異点の特異点解消における Artin の基本サイクルと極大イデアル因子の同一視に関して、1997年に泊が得た結果を精密化する事ができた。「2次元特異点の一般的超平面切断として現れる1次元特異点が重複度分の既約成分を持つ(\*)」と仮定すると、任意の特異点解消上で上記の同一視問題が肯定的に成立する。この(\*)は正規化ブラウイングアップについての接錐が被約であることと同値である。2重点いての J. Dixon の結果の拡張となる。これまでこのタイプの命題は変数分離型の特異点についての結果がいくつか知られていたが、この判定法により、ニュートン境界のある条件を満たすものについて、同一視条件が成り立つものが多く発見された。これらは、変数分離とは限らないものをたくさん含んでいる。

(5) 渡辺は、イデアルの組  $(I, J)$  に対する係数イデアル  $a(I, J)$  の構成を単項式で生成されるイデアルについて行い、 $a(I, J)$  を決定する「試行の回数」と節減数が一致するなどの結果を得た(大西智史との共同研究)。

(6) 松浦は、Algebraic stack の基礎理論の整備を目指し、特異点解消とモジュライ空間について、ファンクトリアリティについての考察をおこなった。内外の研究との関連から、一年目として目的となる命題の定式化に前進があった。(現在論文を準備中である。)

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

① K. Kurano, E. Sato, A. Singh,

K.-i. Watanabe, Multigraded rings, Diagonal subalgebras and rational singularities, J. of Algebra, 322, 3248 - 3267 (2009)

② K. i. Watanabe, C. Huneke, M. Mustata, S. Takagi: F-thresholds, tight closure, integral closure, and multiplicity bounds" Michigan Math. J. vol. 57, 60-67 (2007)

③ K. i. Watanabe, R. Takahashi: Totally reflexive modules constructed from smooth projective curves of genus  $g \geq 2$ " Archiv der Mathematik 89. 60-67 (2007)

④ S. Noh, K.-i. Watanabe: Adjacent integrally closed ideals in 2-dimensional regular local rings. J. of Algebra 300. 156-166 (2006)

[学会発表] (計 5 件)

① 泊昌孝: 2次元正規特異点の maximal ideal cycle と fundamental cycle について 研究集会「特異点 山形セミナー2010」2010年3月3日山形大学

② 泊昌孝; Classification of hypersurface simple K3 singularities 95 and others, 研究集会「代数幾何 in 九州」2009年2月2日、九州大学箱崎キャンパス

③ K. i. Watanabe: "Methods of Characteristic  $p > 0$  in Singularity Theory" Summer School. "Characteristic p methods in Algebraic Geometry". 2007年7月14日-19日. Drobeta-Turum-Severin; Romania

④ 泊昌孝; Classification of hypersurface simple K3 singularities - 95 and others, 2007年3月27日/埼玉大学理学部、日本数学会、一般講演(代数学)

⑤ 渡辺敬一; On F-thresholds, 京都大学数理解短期共同研究 2006年8月28日-9月1日/京都大学数理解

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

泊昌孝 (TOMARI MASATAKA)  
日本大学・文理学部・教授

研究者番号：60183878

(2)研究分担者

渡辺 敬一 (WATANABE KEIICHI)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：10087083

松浦 豊 (MATSUURA YUTAKA)

日本大学・文理学部・准教授

研究者番号：50096905

(3)連携研究者

なし