

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006-2008

課題番号：18540052

研究課題名（和文） 局所環上の代数サイクルの研究

研究課題名（英文） A research of algebraic cycles on local rings

研究代表者

藏野 和彦（KURANO KAZUHIKO）

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：90205188

研究成果の概要：研究代表者はネーター局所環のチャウ群上で数値的同値を定義して、さらにその数値的同値で割った群は有限生成自由アーベル群になることを証明した。その理論をさらに発展させて局所環のチャウ群の構造を詳しく調べる。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,300,000	0	1,300,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	630,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：グロタンディエク群、チャウ群、代数サイクル

1. 研究開始当初の背景

Grothendieck は、スムーズ射影多様体に対してリーマン・ロッホの定理を証明した。それは、その後 Baum-Fulton-MacPherson により特異多様体に対しても拡張されている。彼らは、スムーズという仮定をはずしただけではなく、多様体が射影的であるという条件をも除いている。その一般化の結果、ネーター局所環 R によって定まるアフィン・スキーム $\text{Spec}(R)$ に対してもリーマン・ロッホの定理が成立することがわかった。つまり、有限生成 R -加群の Grothendieck 群 $G_0(R)$ とチャウ群 $A_*(R) = \bigoplus_i A_i(R)$ との間に、有理数体 \mathbb{Q} をテンソルすることにより、非常に良い性質を持つ同型が構成できる。(ここで、 $A_i(R)$ は $\text{Spec}(R)$ の次元 i の既

約な閉部分スキームによって生成された自由アーベル群を、有理同値で割った群である。) 1980年代に Roberts は、当時可換環論で未解決問題であった交点数の消滅定理 (Serre の重複度予想の一部) と新交叉予想を、上の特異リーマン・ロッホの定理を $\text{Spec}(R)$ に対して使うことにより (R はネーター局所環)、肯定的に解決した。このようにして、可換環論に代数サイクルの理論が導入されたのである。

最近、研究代表者は、ネーター局所環 R のチャウ群 $A_*(R) = \bigoplus_i A_i(R)$ 上で数値的同値を定義して、さらにその数値的同値で割った群 $\overline{A_*(R)} = \bigoplus_i \overline{A_i(R)}$ は有限生成自由アーベル群になることを証明した。これに

より、例えば、非特異射影多様体におけるピカール数が、ネーター局所環に対しても定義できることがわかったのである。

2. 研究の目的

次の二つの問題に取り組みたい。

(1) d 次元のネーター局所環 R に対して、 $i \in \mathbb{Z}$ のとき $\overline{A}_i(R) = 0$ となるか？

この問題は、スタンダード予想と深い関係がある。実際、スタンダード予想が正しければ、非特異射影多様体のアフィン・コーンの原点での局所環に対しては、上の問題は正しいことが証明されている。

(2) 1970 年頃、Danilov は、ネーター局所整閉整域が DGC (離散的な因子類群) を持つという概念を定義して、深い研究を行った。ネーター局所整閉整域 R の因子類群 $Cl(R) = A_{\dim(R)-1}(R)$ に対して次の三通りの離散性が定義されていることになる。

定義 1 「 R は、Danilov の意味で DGC を持つ (つまり、自然な射 $Cl(R) \rightarrow Cl(R[[T]])$ は同型である)」

定義 2 「 R の因子類群 $Cl(R)$ は有限生成アーベル群である」

定義 3 「 $A_{\dim(R)-1}(R)$ の中で、0 に数値的同値な元は 0 のみである」

この三つの離散性の関係を突き止めたい。

3. 研究の方法

まず、トーリック多様体の局所環などの非常に具体的なネーター局所環に対して、問題 (1) が正しいのかどうか確かめたい。

スタンダード予想が正しければ、非特異射影多様体のアフィン・コーンの原点での局所環に対して問題 (1) が従うのであるが、この逆問題を考えてみたい。

この問題 (1) が仮にスタンダード予想と同値であれば、それはそれで面白いのであるが、そのときは、この問題を完全に解くことは非常に困難であることが予想される。しかし、問題 (1) は、スタンダード予想よりも、かなり弱い予想であるという可能性もある。よって、スタンダード予想との関連を明らかにすることは重要であろう。

トーリック多様体の局所環などでは、数値的に 0 になる元は 0 のみであることが多い。このケースでは、研究代表者は $i \in \mathbb{Z}$ のとき $A_i(R) = 0$ ではないか

と考えている。トーリック多様体のチャウ環は、ファンの組み合わせ論などで記述することができるので、そのことを使って局所環のケースも計算可能であろうと考えている。

問題 (2) に関しては、これは、正直に言って最近始めた問題であり、全体像がまだよくつかめていない状態である。全体像をつかむためには、基礎的な勉強が必要である。しかし、局所環の代数サイクルの研究のためには、最初に行うべきは、整閉整域の場合の因子類群の構造の研究であることは明らかである。数値的同値で割ることにより、有限生成自由アーベル群 $\overline{Cl}(R) = \overline{A}_{\dim(R)-1}(R)$ が得られる。この加群の階数は、非特異射影多様体のピカール数の局所環版であると考えられる。 R が非特異射影多様体 X のアフィン・コーンの原点での局所環のときは、局所環 R のピカール数は、 X のピカール数マイナス 1 以下である。局所環 R のピカール数は、 X のピカール数マイナス 1 になる例も多いが、そうでない例もある。代数幾何学においてピカール数が非常に重要な役割を果たしていることから、将来この局所環のピカール数あるいは格子 $\overline{A}_{\dim(R)-1}(R)$ 自身が可換環論において重要な武器になるのではないかと期待している。

問題 (2) に戻るが、この種の問題の専門家 (共同研究を行うインドのタタ研究所の V. Srinivas 教授) に聞いたところ、 R が完備局所環であると仮定すれば、定義 3 が定義 1 あるいは定義 2 と更なる関係が見つかる可能性があるとのことである。環を完備化したときの因子類群の変化が、この問題を難しくしているらしい。よって、その困難なところを避けるために、まずは、完備局所環に制限して考えたい。

4. 研究成果

正標数の正規局所環 A の e 回のフロベニウス射によって得られた加群 $\hat{e}A$ と、 A の標準加群 K_A のデターミナントの関係についてのある公式を導いた。この公式と Huneke-McDermott-Monsky の結果によって、 Q -ゴーレンシュタイン環のヒルベルト・クンツ関数の第二項の消滅定理を示すことができた。

ネーター局所環 A に対して、 \hat{A} はその極大イデアルの位相での完備化とする。 A 上の有限生成加群の Grothendieck 群 $G_0(A)$ から $G_0(\hat{A})$ への自然な射を考える。鴨井-蔵野 (J. Algebra, 254 (2002), 21-43) により、 A が孤立特異点の場合などい

くつかのケースで、その射は単射であることが示されている。Hochster により、その射の核が non-zero torsion になる例が構成された。

この論文では、その核が non-zero non-torsion になるような例を構成した。その例では、 A の non-normal class group (余次元 1 のチャウ群) から $\hat{\mathcal{A}}$ のその核が Z と同型である。

Z^2 graded ring のダイアゴナル部分環の性質を議論した。いつ、有理特異点になるかなどがわかった。また、この理論を使って、スムーズな多様体 X で $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ かつ $H^1(X, \mathcal{O}_X(1)) \neq 0$ なる例を作った。

Danilov の理論により、この例では X のアフィンコーンの因子類群は、有限生成であるが、完備化すると同形ではないことがわかる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- (1) K. Kurano, E.-i. Sato, A. K. Singh and K.-i. Watanabe, Multigraded rings, diagonal subalgebras, and rational singularities, J. of Algebra, 査読有, 掲載決定済み
- (2) 早坂太・山田修平, 2変数 Hilbert 関数の多項式記述についての一考察, 明治大学理工学部研究報告, 査読有, 掲載決定済み
- (3) K. Kurano and V. Srinivas, A local ring such that the map between Grothendieck groups with rational coefficients induced by completion is not injective, Michigan Math. J., 査読有, 57 (2008), 485--498.
- (4) S. Goto, F. Hayasaka and R. Takahashi, On vanishing of certain Ext modules, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 60 (2008), 1045--1064.
- (5) F. Hayasaka and E. Hyry, A family of graded modules associated to a module, Comm. Algebra, 査読有, 36 (2008), 4201--4217.
- (6) K. Kurano, The singular Riemann-Roch theorem and Hilbert-Kunz functions, (ア) J. Algebra, 査読有, 304 (2006), 487-499.
- (7) F. Hayasaka, Asymptotic stability of primes associated to homogeneous components of multigraded modules, J. Algebra, 査読有, 306 (2006), 535--543,

[学会発表] (計 25 件)

- (1) 早坂太, パラメータ加群の重複度について、日本数学会、2009年3月29日、東京大学
- (2) K. Kurano, Nagata conjecture and symbolic Rees rings of space monomial curves, The 4th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra, 2009年2月21日、明治大学理工学部
- (3) F. Hayasaka, On the Buchsbaum-Rim multiplicity of a parameter module, The 4-th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2009年2月21日、明治大学理工学部
- (4) 藏野和彦, 永田予想と space monomial curve の symbolic Rees 代数について、第21回可換環論セミナー、2009年1月27日、釧路市生涯学習センター
- (5) 鴨井祐二, A note on Hilbert coefficients of Gorenstein graded rings, 第21回可換環論セミナー、2009年1月27日、釧路市生涯学習センター
- (6) 早坂太, ある素因子の集合の漸近挙動について、第21回可換環論セミナー、2009年1月28日、釧路市生涯学習センター
- (7) 早坂太, A note on the Buchsbaum-Rim multiplicity, 第30回可換環論シンポジウム、2008年11月18日、佐賀
- (8) K. Kurano, Gorenstein quotient isolated singularities of odd prime dimension are cyclic, COMMUTATIVE ALGEBRA AND ITS INTERACTION WITH ALGEBRAIC GEOMETRY, 2008年10月3日、C. I. R. M. Luminy (France)
- (9) K. Kurano, Symbolic Rees rings of space monomial curves in characteristic p and existence of negative curves in characteristic 0, INTERNATIONAL CONFERENCE "Towards establishing a cutting-edge platform for commutative ring theory in the 21th century", 2008年3月20日、横浜開港記念会館
- (10) 藏野和彦, Hard Lefschetz theorem and standard conjecture in commutative ring theory, ミニ研究集会釧路2008, 2008年2月18日、北海道教育大学釧路校
- (11) 早坂太, パラメータ加群とブックスバウム・リム重複度, 第20回可換環論セミナー、2008年1月28日、千葉
- (12) F. Hayasaka, A family of graded modules associated to a module,

- International Conference in Commutative Algebra, IIT-Bombay, 2008年1月8日、Mumbai (India)
- (13) K. Kurano, A local ring such that the map between Grothendieck group with rational coefficients induced by completion is not injective, The 3rd Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra, 2007年12月5日、Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam
- (14) F. Hayasaka, On certain graded modules associated to a module, The 3rd Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2007年12月3日、Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam
- (15) 藏野和彦, Symbolic Rees rings of space monomial curves in characteristic p and existence of negative curves in characteristic 0, 第29回可換環論シンポジウム, 2007年11月21日、愛知厚生年金会館 ウェルシティなごや
- (16) 早坂太, A family of graded modules associated to a module, 第29回可換環論シンポジウム, 2007年11月19日、愛知厚生年金会館 ウェルシティなごや
- (17) 早坂太, 加群に随伴するある次数加群の族について, 日本数学会, 2007年9月23日、東北大学
- (18) 藏野和彦, Intersection multiplicity の代数的記述について, 第52回代数学シンポジウム, 2007年8月9日、神戸大学
- (19) K. Kurano, An example of a local ring R such that $G_0(R)_{\mathbb{Q}} \rightarrow G_0(\hat{R})_{\mathbb{Q}}$ is not injective, Commutative Algebra and its Interaction with Algebraic Geometry, 2007年6月14日、BIRS (Banff International Research Station), カナダ
- (20) 藏野和彦, Intersection multiplicity の代数的な記述について, 第2回代数学・解析・幾何学セミナー, 2007年2月19日、鹿児島大学理学部
- (21) 早坂太, A certain family of graded modules associated to a module, 第19回可換環論セミナー, 2007年1月29日、九州大学
- (22) 藏野和彦, Symbolic Rees 環 (ある正規射影局面の全座標環) の有限生成性—MATLAB を使った計算実験—, 計算可換代数と計算代数幾何, 2007年1月18日、数理解析研究所
- (23) 藏野和彦, An example of a local ring A such that the kernel of the map from $\{\mathrm{Yrm} G\}_0(A)$ to $\{\mathrm{Yrm} G\}_0(\hat{A})$ is not torsion, 第28回可換環論シンポジウム, 2006年11月16日、ウエルサンピア多摩
- (24) 藏野和彦, On the algebraic description of intersection multiplicity due to Serre, 第二回モチーフ勉強会, 2006年9月29日、東大数理
- (25) K. Kurano, Numerical equivalence and the vanishing conjecture, Homological Conjectures in Commutative Algebra, A Conference in Honor of Paul Roberts' 60th Birthday, 2006年5月19日、Snowbird, Utah アメリカ合衆国

6. 研究組織

- (1) 研究代表者
 藏野 和彦 (KURANO KAZUHIKO)
 明治大学・理工学部・教授
 研究者番号：90205188
- (2) 研究分担者
 鴨井 祐二 (KAMOY YUJI)
 明治大学・商学部・講師
 研究者番号：80308064
 早坂 太 (HAYASAKA FUTOSHI)
 明治大学・理工学部・講師
 研究者番号：20409460
- (3) 連携研究者
 なし