

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540062

研究課題名 (和文) 離散群論への微分幾何学的アプローチ

研究課題名 (英文) A differential geometric approach to discrete group theory

研究代表者

井関 裕靖 (IZEKI HIROYASU)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90244409

研究成果の概要：

空間の対称性を数学的に記述するときに用いられる概念が「群」および「群の空間への作用」である。本研究では、どのような群がどのような空間に作用し得るかを、幾何学的手法で研究した。その際に用いられるのは、群の空間への作用の様子のもっとも効率のよい実現を与える調和写像と呼ばれる写像である。この研究成果から、ある種の空間に非自明な仕方で作用し得ない群が非常に多く存在することが明らかになった。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：離散群、非正曲率距離空間、調和写像、固定点性質、剛性

## 1. 研究開始当初の背景

本研究に先立って、井関（本研究の研究代表者）が研究代表者を務めた科学研究費基盤研究 (C) 「組合せ調和写像と群作用の剛性」 (2003年度～2005年度、課題番号15540056) において、単体複体から非正曲率距離空間への調和写像を群作用の剛性に応用される研究がなされていた。

具体的には、離散群  $\Gamma$  が単体的、固有不連続かつ余有限に作用する単体複体  $X$  から、 $\Gamma$  が等長的に作用する非正曲率距離空間  $Y$  への  $\Gamma$  同変写像に対してエネルギーを定義し、エネルギー最小写像の存在の証明、および特別

な場合にエネルギー最小写像の幾何学的な特徴付けを行った。さらに、このエネルギーの勾配流に関する考察から、単体複体  $X$  の頂点のリンクから  $Y$  の接錐への写像に対して定義される Rayleigh 商の下限として与えられる非線形固有値を用いて、 $\Gamma$  の  $Y$  への作用が固定点をもつための十分条件を定式化した。幾つかの具体例でこの非線形固有値の評価も行い、その成果を納谷（研究分担者）との共著論文として発表した (Geometriae Dedicata 114 巻 (2005), pp. 147-188 に掲載。また、途中経過は、京都大学数理解析研究所講究録 第1329巻 (2003), pp. 1-7 にも

掲載されている)。本研究を開始する時点で、この結果は、単体複体  $X$  の存在を用いず、直接  $\Gamma$  から  $Y$  への同変写像を扱う形にまで一般化されていた。

本研究ではこれをさらに推し進め、多くの群が非正曲率距離空間に対する固定点性質を、微分幾何学的にとらえることを試みた。

## 2. 研究の目的

非正曲率距離空間  $Y$  (あるいはそれらの族) を固定したとき、 $Y$  (あるいはそれらの族に属する任意の非正曲率空間) への任意の等長的作用が固定点をもつような離散群は往々にして興味深い性質を有する。例えば、離散群  $\Gamma$  が Kazhdan の性質 (T) をもつことは、「 $\Gamma$  の Hilbert 空間への任意の等長的作用が固定点をもつ」ことと同値である。また、Bass-Serre 理論によれば、群の融合積への分解は樹木への等長的作用により捉えられ、樹木への任意の等長的作用が固定点をもつような群は、融合積に分解せず、かつ無限巡回群を商にもたない群として特徴づけられる。さらに、有限生成な無限群  $\Gamma$  の Hilbert 空間、 $SL(n, \mathbf{R})$  および  $SL(n, \mathbf{C})$  に付随する Riemann 対称空間、および  $PGL(n, \mathbf{Q}_p)$  に付随する Bruhat-Tits ビルディングへの任意の等長的作用が固定点をもつならば、 $\Gamma$  は非線形群になることが知られている。

従来、これらの群は、その特徴的な性質のため、具体的な例の構成が困難で、散在的・例外的な存在という位置付けにあった。しかし、最近の研究の進展は、与えられた非正曲率距離空間への任意の等長的作用が固定点をもつような群が豊富に存在することを示唆しているように見える。本研究の目的は「ある非正曲率距離空間  $Y$  (あるいはある非正曲率距離空間の族に属する任意の空間) への任意の等長的作用が固定点をもつ」という性質 (以下「 $Y$  (あるいは族) に対する固定点性質」と呼ぶ) をもつ群が実は非常に豊富に存在する、ということを定式化・証明し、このような固定点性質をもつ群の性質について考察することである。

## 3. 研究の方法

本研究に先立つ、井関と納谷の研究から、有限表示群  $\Gamma$  が非正曲率距離空間  $Y$  に対する固定点性質をもつための十分条件は、 $\Gamma$  の表示から得られるグラフ  $L$  から  $Y$  の接錐への写像に対する Rayleigh 商の下限 (以下、非線形固有値という) により与えられることがわかってきた。この非線形固有値は  $L$  上のラプラス作用素の固有値と  $Y$  の幾何学的不変量  $\delta(Y)$  により評価することができる。 $\delta(Y)$  がある程度小さく、かつ  $L$  上のラプラス作用素の

固有値がある程度大きければ、その表示から得られる有限表示群が  $Y$  に対する固定点性質をもつことが導かれる。一方、ランダムグラフの固有値に関する結果は、 $L$  のラプラス作用素の固有値が大きい有限表示群が (適切に設定された有限表示群のクラスの中に) 非常に高い確率で存在することを主張している。このことに注目し、種々の  $Y$  に対する  $\delta(Y)$  の評価法を検討することにより、ある種のランダム群の固定点性質について研究した。

一方、この非線形固有値を用いて与えられる条件より弱い十分条件を、 $\Gamma$  から  $Y$  への  $\Gamma$  同変写像のエネルギーの勾配評価に現れる定数を用いて与えることもできる。「研究成果」の欄に詳述するように、我々は、この定数を、一般化された Kazhdan 定数として、また、 $n$  ステップの推移確率を用いて定義される  $n$  ステップ・エネルギーを用いて捉えることに成功した。

2006年度および2007年度は、上記の研究を、研究分担者である金井雅彦、小谷元子、納谷信、藤原耕二との研究討論を通して推進した。2008年度は、主に研究代表者である井関が研究を進め、連携研究者となった金井雅彦、小谷元子、納谷信、藤原耕二との研究討論を継続した。この過程で、 $\delta(Y)$  の評価、ランダム群の固定点性質について、とくに研究討論の成果があった納谷信、および研究協力者の近藤剛史との共同研究として研究成果を発表した。

## 4. 研究成果

「研究の目的」欄で述べた目的に沿って、「研究の方法」欄で述べたように研究を推進し、以下に述べるような成果を挙げる事ができた。

「研究の方法」欄で触れたように、我々は、 $\Gamma$  から  $Y$  への  $\Gamma$  同変写像のエネルギーの勾配評価に現れる定数を用いて、 $\Gamma$  が  $Y$  への固定点性質をもつための十分条件を与えていた。本研究では、scaling に関して閉じた非正曲率距離空間の族  $Y$  を考えたときには、 $\Gamma$  が  $Y$  に対する固定点性質をもつための必要十分条件がこの定数を用いて与えられることを明らかにした。 $Y$  として Hilbert 空間をとったときには、この定数は Kazhdan 定数と呼ばれる  $\Gamma$  の不変量と本質的に一致する。この定数を一般化された Kazhdan 定数とよぶ。この一般化された Kazhdan 定数に関する今後の研究により、 $\Gamma$  の群としての性質と非正曲率距離空間  $Y$  の幾何学的性質とが、どのように固定点性質と関わってくるかが明らかになると考えている。

ランダム・ウォークが与えられた離散群  $\Gamma$  が非正曲率空間  $Y$  へ等長的に作用しているとき、その作用に関して同変な  $\Gamma$  から  $Y$  への写

像  $f$  のエネルギー  $E(f)$  を定義することができる。さらに、 $\Gamma$  に与えられたランダム・ウォークの  $n$  ステップの推移確率は再び  $\Gamma$  上のランダム・ウォークを定めるので、この  $n$  ステップの推移確率を用いて同変写像  $f$  のエネルギー  $En(f)$  を定義することもできる。この  $n$  ステップ・エネルギーを用いて前述の定数を捉え、その応用として、グラフ・モデルのランダム群に対する固定点定理を得た。

さらに、この  $n$  ステップ・エネルギーを用いた固定点の存在証明が、プレーン・ワード・モデルのランダム群についても有効であることを発見し、プレーン・ワード・モデルのランダム群の固定点性質に関する研究にも取り組んだ。こちらについては、まだ十分に納得のいく結果は得られていないが、証明に用いる議論を精密化することで、関係式集合の密度がある程度大きければ、プレーン・ワード・モデルのランダム群は、適当な仮定を満たす非正曲率距離空間に対する固定点性質をもつ無限双曲群になることが証明できると考えている。

以上の研究成果から、「研究の目的」欄で述べた通り、これまでの研究成果が示唆していた「非正曲率距離空間に対する固定点性質をもつ離散群が非常に多く存在する」ことを明らかにすることができた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Hiroyasu Izeki, A fixed-point property of finitely generated groups and an energy of equivariant maps, proceedings of the 1<sup>st</sup> MSJ-SI “Probabilistic Approach to Geometry” に掲載決定 (査読有)
- ② Hiroyasu Izeki, Takefumi Kondo, and Shin Nayatani, Fixed-point property of random groups, Annals of Global Analysis and Geometry に掲載決定 (査読有)
- ③ 井関裕靖・近藤剛史・納谷信、A fixed-point theorem for discrete-group actions on Hadamard spaces, 京都大学数理科学研究所講究録 1492 (2006), 56-64. (査読有)
- ④ 井関裕靖・納谷信、調和写像による超剛性定理および固定点定理へのアプローチ, 数学 58 (2006), 239-262. (査読有)

[学会発表] (計5件)

- ① Hiroyasu Izeki, A fixed-point property of discrete groups and an energy of equivariant maps, 1<sup>st</sup> MSJ-SI “Probabilistic Approach to Geometry”, 2008年8月5日 (京都大学)
- ② Shin Nayatani, Fixed-point property of random groups via energy of maps, “Geometric Group Theory, Geometric Analysis and Mapping Class Groups”, 2008年5月5日 (Johns Hopkins 大学)
- ③ 井関裕靖, 固定点性質と同変写像のエネルギー, RIMS共同研究「離散群と作用素環論」, 2007年2月1日 (京都大学数理解析研究所)
- ④ 井関裕靖, Fixed-point property of discrete groups, 研究集会「大域解析と微分幾何 --- その情報科学への関わり ---」2006年10月22日 (東北大学大学院情報科学研究科)
- ⑤ 井関裕靖, ランダム群に対する固定点定理, 第49回函数論シンポジウム, 2006年9月15日 (東京工業大学)

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

井関 裕靖 (IZEKI HIROYASU)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 90244409

(2) 研究分担者

小谷 元子 (KOTANI MOTOKO)  
(2007年度まで)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 50230024

藤原 耕二 (FUJIWARA KOJI)  
(2007年度まで)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号：60229078

金井 雅彦 (KANAI MASAHIKO)  
(2007年度まで)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授  
研究者番号：70183035

納谷 信 (NAYATANI SHIN)  
(2007年度まで)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授  
研究者番号：70222180

(3) 連携研究者

小谷 元子 (KOTANI MOTOKO)  
(2008年度のみ)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：50230024

藤原 耕二 (FUJIWARA KOJI)  
(2008年度のみ)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号：60229078

金井 雅彦 (KANAI MASAHIKO)  
(2008年度のみ)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授  
研究者番号：70183035

納谷 信 (NAYATANI SHIN)  
(2008年度のみ)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授  
研究者番号：70222180

(4) 研究協力者

近藤剛史 (KONDO TAKEFUMI)  
神戸大学・大学院理学研究科・GCOE 博士研究員